ÁLGEBRA LINEAR

3.ª edição

OLDRINI/COSTA
GUEIREDO/WETZLER

editora HARBRA

UFPEL
241600

ÁLGEBRA LINEAR

3ª edição

ampliada e revista

JOSÉ LUIZ BOLDRINI
SUELI I. RODRIGUES COSTA
VERA LÚCIA FIGUEIREDO
HENRY G. WETZLER

Depto. de Matemática da
Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP

editora HARBRA ltda.

Biblioteca de Ciência & Tecnologia
UFPel

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

A383
3. ed.

Álgebra linear / José Luiz Boldrini ... [et al.]. — 3. ed. —
São Paulo : Harper & Row do Brasil, 1980.
Bibliografia.
1. Álgebra linear I. Boldrini, José Luís.

17. CDD-512.897
18. -512.5

80-0969

Índices para catálogo sistemático:
1. Álgebra linear 512.897 (17.) 512.5 (18.)

Class. 512.5
A394
3.ed.
Registro 14433 102454
Data 18 / 07 / 2006
Livraria DO PROFESSOR
R$ 46,33
OBRA: 51280

Estante 512.5 / A394 / 3.ED.
Obra 51280 C. Tecnol.
Registro 0102454
Reg Int. 14333

Direção Geral: Julio E. Emöd
Supervisão Editorial: Maria Pia Castiglia
Coordenação Editorial: Maria Elizabeth Santo
Composição e Artes: AM Produções Gráficas Ltda.
Fotolitos: Ferrari Studio e Artes Gráficas Ltda.
Capa: Maria Paula Santo
Impressão e Acabamento: Donnelley Cochrane Gráfica Editora do Brasil Ltda.

Fotografia da Capa: Néstor E. Massa

A fotografia da capa ilustra a seção 5.5. Para obtê-la, utilizou-se o laser de argônio do Departamento de Eletrônica Quântica do Instituto de Física da UNICAMP-SP.

ÁLGEBRA LINEAR – 3ª edição
Copyright © 1986 por **editora HARBRA ltda.**
Copyright © 1984, 1980, 1978 por Editora Harper & Row do Brasil Ltda.

Rua Joaquim Távora, 629 – Vila Mariana – 04015-001 – São Paulo – SP
Promoção: (011) 5084-2482 e 571-1122. Fax: (011) 575-6876
Vendas: (011) 549-2244 e 571-0276. Fax: (011) 571-9777

Reservados todos os direitos. É terminantemente proibido reproduzir esta obra, total ou parcialmente, por quaisquer meios, sem a permissão expressa dos editores.

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

CONTEÚDO

Prefácio à terceira edição

CAPÍTULO 1 MATRIZES 1

1.1 Introdução 1
1.2 Tipos especiais de matrizes 3
1.3 Operações com matrizes 5
1.4 Exercícios 11
*1.5 Processos aleatórios: cadeias de Markov 14
*1.6 Exercícios 26
1.7 Respostas 28

CAPÍTULO 2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES 29

2.1 Introdução 29
2.2 Sistemas e matrizes 33
2.3 Operações elementares 35
2.4 Forma escada 37
2.5 Soluções de um sistema de equações lineares 41
2.6 Exercícios 49
2.7 Demonstrações 60

CAPÍTULO 3 DETERMINANTE E MATRIZ INVERSA 64

3.1 Introdução 64
3.2 Conceitos preliminares 65
3.3 Determinante 66
3.4 Desenvolvimento de Laplace 69
3.5 Matriz adjunta – matriz inversa 72
3.6 Regra de Cramer 77
3.7 Cálculo do posto de uma matriz através de determinantes 80
*3.8 Matrizes elementares
Um processo de inversão de matrizes 82
*3.9 Procedimento para a inversão de matrizes 86
3.10 Exercícios 90

CAPÍTULO 4 ESPAÇO VETORIAL 97

4.1 Vetores no plano e no espaço 97
4.2 Espaços vetoriais 103
4.3 Subespaços vetoriais 105
4.4 Combinação linear 112
4.5 Dependência e independência linear 114
4.6 Base de um espaço vetorial 116
4.7 Mudança de base 123
4.8 Exercícios 129
4.9 Respostas 135

CAPÍTULO 5 TRANSFORMAÇÕES LINEARES 142

5.1 Introdução 142
5.2 Transformações do plano no plano 147
5.3 Conceitos e teoremas 150
5.4 Aplicações lineares e matrizes 157
* 5.5 Aplicações à óptica 167
5.6 Exercícios 171

CAPÍTULO 6 AUTOVALORES E AUTOVETORES 178

6.1 Introdução 178
6.2 Polinômio característico 185
6.3 Exercícios 194

CAPÍTULO 7 DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES 199

7.1 Base de autovetores 199
7.2 Polinômio minimal 206
* 7.3 Diagonalização simultânea de dois operadores 210
7.4 Forma de Jordan 211
7.5 Exercícios 213

CAPÍTULO 8 PRODUTO INTERNO 219

8.1 Introdução 219
8.2 Coeficientes de Fourier 225
8.3 Norma 226
8.4 Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt 230
8.5 Complemento ortogonal 234
8.6 Espaços vetoriais complexos – produto interno 235
8.7 Produto interno e estatística 236
* 8.8 O ajuste de curvas e o método dos mínimos quadrados 239
8.9 Exercícios 247

CAPÍTULO 9 TIPOS ESPECIAIS DE OPERADORES LINEARES 253

9.1 Introdução 253
9.2 Operadores auto-adjuntos e ortogonais 258
9.3 Diagonalização de operadores auto-adjuntos e caracterização dos operadores ortogonais 261
9.4 Exercícios 264

CAPÍTULO 10 FORMAS LINEARES, BILINEARES E QUADRÁTICAS 269

10.1 Formas lineares 269
10.2 Formas bilineares 270
10.3 Matriz de uma forma bilinear 272
10.4 Forma bilinear simétrica 274
10.5 Formas quadráticas 274
10.6 Diagonalização da forma quadrática 277
10.7 Exercícios 278

CAPÍTULO 11 CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS E QUÁDRICAS 285

11.1 Introdução 285
11.2 Retas no plano 287

11.3 Planos no espaço 288
11.4 Cônicas no plano 289
11.5 Quádricas em R^3 298
11.6 Exercícios 305
*11.7 Propriedades geométricas das cônicas 308

CAPÍTULO 12 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES 316

12.1 Introdução 316
12.2 Equações diferenciais 317
12.3 Resolução de sistemas de *n* equações lineares homogêneas de 1ª ordem e coeficientes constantes 327
12.4 Exercícios 346

CAPÍTULO 13 PROCESSOS ITERATIVOS E ÁLGEBRA LINEAR 332

13.1 Introdução 332
13.2 Seqüências de matrizes 333
13.3 Resolução de sistemas lineares – processo iterativo 337
13.4 Método de Jacobi 344
13.5 Processo de Gauss-Seidel 345
13.6 Estimativa de erro 345
13.7 Exercícios 348

CAPÍTULO 14 CONJUNTOS CONVEXOS E PROGRAMAÇÃO LINEAR 350

14.1 Introdução 350
14.2 Conjuntos convexos 351
14.3 Introdução à programação linear (PL) 362
*14.4 Exercícios 371
14.5 Método simplex 374
14.6 Exercícios 398
14.7 Respostas 402

Bibliografia geral 406
Índice remissivo 407

PREFÁCIO À TERCEIRA EDIÇÃO

Este livro teve como origem o texto de um curso de Álgebra Linear, oferecido para alunos de Engenharia, Física, Matemática, Estatística e Computação da Universidade Estadual de Campinas. O programa foi estabelecido tendo em vista que seria o único curso de Álgebra Linear que a maioria dos alunos receberia. Por isso, procuramos englobar os assuntos que seriam indispensáveis aos cursos que estes alunos seguissem posteriormente. Ele foi ministrado numa disciplina de segundo semestre que é seqüência de um curso, também semestral, de Geometria Analítica.

Os pré-requisitos para a leitura deste texto são os tópicos de Matemática, normalmente vistos até o curso Colegial. A partir destes, introduzimos e desenvolvemos razoavelmente os conceitos básicos de Álgebra Linear, procurando sempre indicar aos alunos as fontes às quais eles podem recorrer para aprofundar seus conhecimentos.

Alunos que cursam pela primeira vez esta disciplina, freqüentemente julgam-na muito abstrata e não vêem como podem utilizar os conceitos básicos. E, normalmente, muitos cursos terminam sem que se mostre aos alunos uma aplicação concreta de tudo o que aprenderam.

Procuramos, então, dar aos tópicos uma abordagem com dois objetivos:

1. Conseguir uma exposição da matéria, de tal forma que a ênfase seja colocada no *uso* dos conceitos. Neste sentido, optamos por uma exposição em que estes sejam introduzidos, na medida do possível, dentro de um contexto onde surja a necessidade de sua apresentação. Algumas demonstrações são propostas na forma de exercícios, o que permite uma maior fluência do texto e possibilita ao aluno desenvolvê-las dentro do seu raciocínio lógico.

2. Encaminhar os conceitos para a solução de problemas nos quais os alunos já tenham sentido dificuldade. Desta forma, é conveniente fixar qualquer um dos capítulos (Cap. 11: *Classificação de Cônicas e Quádricas*; Cap. 12: *Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais*; Cap. 13: *Processos Iterativos*; Cap. 14: *Conjuntos Convexos e Programação Linear*), como chave, ou seja, um capítulo que englobe os diversos conceitos apresentados no livro. Na busca das soluções para os problemas que colocamos nestes capítulos recorremos à maioria dos conceitos incorporados em um curso tradicional de Álgebra Linear (noções de espaço vetorial, autovalores e autovetores, diagonalização de operadores), de modo que os alunos possam perceber a inter-relação entre eles e a aplicação conjunta dos mesmos.

Dentro desta perspectiva, poderíamos sugerir algumas seqüências para o desenvolvimento de um curso de Álgebra Linear:

1. Capítulos 1 a 11;
2. Capítulos 1 a 8 e 12;
3. Capítulos 1 a 8 e 13;
4. Capítulos 1 a 8 e 14.

Uma outra sugestão é a de que o conteúdo deste livro seja desenvolvido, como já vem sendo feito, em disciplinas que integrem os tradicionais cursos de Cálculo, Álgebra Linear e Equações Diferenciais.

Quanto aos aspectos didáticos, gostaríamos de ressaltar que os exercícios são importantes inclusive como extensão de cada capítulo. O conteúdo foi elaborado de modo a se enquadrar em diversos programas, podendo-se deixar de estudar as seções assinaladas com asterisco sem prejuízo do entendimento dos tópicos abordados. Por exemplo, seções como Cadeia de Markov (seção 1.5) e Ajuste de Curvas (8.8), que são tópicos especiais, podem ou não ser incluídas de acordo com o interesse de cada aluno, grupo ou classe.

Nesta terceira edição, a antiga seção 4.9 foi ampliada e transformada no atual Capítulo 14: Conjuntos Convexos e Programação Linear. A relativa simplicidade deste assunto e seu grande número de aplicações práticas são responsáveis por sua difusão e interesse nos últimos anos. Anexamos a este novo capítulo uma seção de autoria do Prof. Antonio Carlos Moretti, que descreve o algoritmo do método simplex para programação linear e indica as etapas para a programação por microcomputadores deste método.

A nossa experiência, assim como a de outros professores, tem mostrado que o núcleo de um curso introdutório de Álgebra Linear e, portanto, o deste livro, corresponde à matéria exposta nos Capítulos de 1 a 8, podendo ser excluídas as seções 7.2 a 7.4, dependendo dos objetivos a atingir. Recomendamos especial atenção aos capítulos introdutórios, principalmente ao que trata de Sistemas Lineares, e que fornecerão a base técnica indispensável para a boa compreensão dos demais capítulos, além de conterem em si métodos fundamentais aplicáveis a muitas situações. Acreditamos que as seções e capítulos alternativos permitam opções para trabalhar com os conceitos de Álgebra Linear em diferentes áreas.

Queremos agradecer a todas as pessoas que leram e utilizaram o livro, enviando sugestões, e de modo especial aos professores Antonio Carlos Gilli Martins e João Frederico C. A. Meyer.

Os Autores

1

MATRIZES

1.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção, apresentamos os conceitos básicos sobre matrizes. Estes conceitos aparecem naturalmente na resolução de muitos tipos de problemas e são essenciais, não apenas porque eles "ordenam e simplificam" o problema, mas também porque fornecem novos métodos de resolução.

Chamamos de *matriz* uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, ao recolhermos os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas, podemos dispô-los na tabela:

	Altura (m)	*Peso (kg)*	*Idade (anos)*
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Ao abstraírmos os significados das linhas e colunas, temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

Observe que em um problema em que o número de variáveis e de observações é muito grande, essa disposição ordenada dos dados em forma de matriz torna-se absolutamente indispensável.

Outros exemplos de matrizes são:

$$\begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} \qquad [3 \quad 0 \quad 1] \qquad [1]$$

Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes.

Representaremos uma matriz de m linhas e n colunas por:

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Usaremos sempre letras maiúsculas para denotar matrizes, e quando quisermos especificar a ordem de uma matriz **A** (isto é, o número de linhas e colunas), escreveremos $\mathbf{A}_{m\times n}$. Também são utilizadas outras notações para matriz, além de colchetes, como parênteses ou duas barras. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

Não obstante, neste livro as matrizes aparecerão sempre entre colchetes.

Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (nesta ordem) em que ele está. Por exemplo, na matriz:

$$\mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

o elemento que está na primeira linha e terceira coluna é -4, isto é, $a_{13} = -4$, Ainda neste exemplo, temos $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = -3$ e $a_{23} = 2$.

1.1.1 Definição: Duas matrizes $\mathbf{A}_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $\mathbf{B}_{r\times s} = [b_{ij}]_{r\times s}$ são iguais, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se elas têm o mesmo número de linhas ($m = r$) e colunas ($n = s$), e todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$).

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \text{sen } 90^\circ & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1.2 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

Ao trabalhar com matrizes, observamos que existem algumas que, seja pela quantidade de linhas ou colunas, ou ainda, pela natureza de seus elementos, têm propriedades que as diferenciam de uma matriz qualquer. Além disso, estes tipos de matrizes aparecem freqüentemente na prática e, por isso, recebem nomes especiais.

Consideremos uma matriz com m linhas e n colunas que denotamos por $\mathbf{A}_{m\times n}$:

1.2.1 Matriz Quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [8]$$

No caso de matrizes quadradas $\mathbf{A}_{m\times m}$, costumamos dizer que **A** é uma matriz de ordem m.

1.2.2 Matriz Nula é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Exemplos:

$$\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{3\times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.3 Matriz-Coluna é aquela que possui uma única coluna ($n = 1$).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Analogamente, temos:

1.2.4 Matriz-Linha é aquela onde $m = 1$.

Exemplos: $[3 \quad 0 \quad -1]$ e $[0 \quad 0]$

1.2.5 Matriz Diagonal é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal" são nulos.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Um exemplo importante de matriz diagonal vem a seguir.

1.2.6 Matriz Identidade Quadrada é aquela em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Exemplos:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.7 Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

1.2.8 Matriz Triangular Inferior é aquela em que $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2.9 Matriz Simétrica é aquela onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix}$$

Observe que, no caso de uma matriz simétrica, a parte superior é uma "reflexão" da parte inferior, em relação à diagonal.

1.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Ao utilizar matrizes, surge naturalmente a necessidade de efetuarmos certas operações. Por exemplo, consideremos as tabelas, que descrevem a produção de grãos em dois anos consecutivos.

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o primeiro ano

	soja	feijão	arroz	milho
Região A	3000	200	400	600
Região B	700	350	700	100
Região C	1000	100	500	800

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o segundo ano

	soja	feijão	arroz	milho
Região A	5000	50	200	0
Região B	2000	100	300	300
Região C	2000	100	600	600

Se quisermos montar uma tabela que dê a produção por produto e por região nos dois anos conjuntamente, teremos que somar os elementos correspondentes das duas tabelas anteriores:

$$\begin{bmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5000 & 50 & 200 & 0 \\ 2000 & 100 & 300 & 300 \\ 2000 & 100 & 600 & 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 250 & 600 & 600 \\ 2700 & 450 & 1000 & 400 \\ 3000 & 200 & 1100 & 1400 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante os dois anos

	soja	feijão	arroz	milho
Região A	8000	250	600	600
Região B	2700	450	1000	400
Região C	3000	200	1100	1400

Podemos considerar agora a seguinte situação. Existem muitos incentivos para se incrementar a produção, condições climáticas favoráveis etc., de tal forma que a previsão para a safra do terceiro ano será o triplo da produção do primeiro. Assim, a matriz de estimativa de produção deste último será:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{soja} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \text{feijão} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \text{arroz} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \text{milho} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 9000 & 600 & 1200 & 1800 \\ 2100 & 1050 & 2100 & 300 \\ 3000 & 300 & 1500 & 2400 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Região A} \\ \text{Região B} \\ \text{Região C} \end{matrix}$$

Acabamos de efetuar, neste exemplo, duas operações com matrizes: soma e multiplicação por um número, que serão definidas formalmente, a seguir.

1.3.1 Adição: A soma de duas matrizes de mesma ordem, $\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B}_{m \times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$, que denotaremos $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Isto é,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Observe que, pela forma com que foi definida, a adição de matrizes tem as mesmas propriedades que a adição de números reais.

Propriedades: Dadas as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ de mesma ordem $m \times n$, temos:

i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (comutatividade)
ii) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (associatividade)
iii) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula $m \times n$.

Poderá ser usada a notação $\mathbf{0}_{m \times n}$ para a matriz nula, quando houver perigo de confusão com o número zero.

A operação que definiremos a seguir é a multiplicação de uma matriz por um número (real ou complexo), também chamada multiplicação por escalar.

1.3.2 Multiplicação por Escalar: Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e k um número, então definimos uma nova matriz

$$k \cdot \mathbf{A} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo:

$$-2\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Dadas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de mesma ordem $m \times n$ e números k, k_1 e k_2, temos:

i) $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
ii) $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$
iii) $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, isto é, se multiplicarmos o número zero por qualquer matriz $\mathbf{A}$, teremos a matriz nula.
iv) $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$

Às vezes, é conveniente considerarmos as linhas de uma dada matriz como colunas de uma nova matriz.

1.3.3 Transposição: Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $\mathbf{A}' = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de $\mathbf{A}$, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. $\mathbf{A}'$ é denominada *transposta* de $\mathbf{A}$.

1.3.4 Exemplos

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Exemplo 2:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

i) Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual à sua transposta, isto é, se, e somente se $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. (Observe a matriz **B** acima.)

ii) $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}$. Isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

iii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$. Em palavras, a transposta de uma soma é igual à soma das transpostas.

iv) $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$, onde k é qualquer escalar.

Antes de definir uma outra operação, a multiplicação de matrizes, vejamos um exemplo do que pode ocorrer na prática.

Suponhamos que a seguinte matriz forneça as quantidades das vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Alimento I} \\ \text{Alimento II} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se ingerirmos 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina?

Podemos representar o consumo dos alimentos I e II (nesta ordem) pela matriz "consumo":

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$$

A operação que vai nos fornecer a quantidade ingerida de cada vitamina é o "produto":

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

Isto é, serão ingeridas 30 unidades de vitamina A, 15 de B e 2 de C.

Outro problema que poderemos considerar em relação aos dados anteriores é o seguinte:

Se o custo dos alimentos depender somente do seu contéudo vitamínico e soubermos que os preços por unidade de vitamina A, B e C são, respectivamente, 1,5, 3 e 5 u.c.p., quanto pagaríamos pela porção de alimentos indicada anteriormente?

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} 30 & 15 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= [30(1{,}5) + 15(3) + 2(5)]$$

$$= [100]$$

Ou seja, pagaríamos 100 u.c.p.

Observamos que nos "produtos" de matrizes efetuados em (*) e (**), cada um dos elementos da matriz-resultado é obtido a partir de uma linha da primeira matriz e uma coluna da segunda. Além disso, com relação às ordens das matrizes envolvidas, temos:

Em (*) $\quad [\ ]_{1\times 2} \cdot [\ ]_{2\times 3} = [\ ]_{1\times 3}$

Em (**) $\quad [\ ]_{1\times 3} \cdot [\ ]_{3\times 1} = [\ ]_{1\times 1}$

O exemplo anterior esboça uma definição de multiplicação de matrizes **A** e **B**, quando **A** é uma matriz linha. Esta noção de produto pode ser estendida para o caso mais geral, e os elementos da matriz-produto serão obtidos pela soma de produtos dos elementos de uma linha da primeira matriz pelos elementos de uma coluna da segunda matriz. Por exemplo,

Sejam

$$\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

e $$\mathbf{B}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

A matriz-produto **AB** é a matriz 2 X 2 definida como:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Agora, passemos para a definição geral.

Consideremos inicialmente o plano $\mathbf{R}^2$, munido de um referencial cartesiano ortogonal (eixos perpendiculares) e um ponto P de coordenadas (x, y). Vamos calcular a distância deste ponto P à origem. Observando a figura e utilizando o teorema de Pitágoras, temos que $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Podemos também interpretar este resultado dizendo que o comprimento (que passaremos a chamar de norma) do vetor (x, y) é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Denotaremos isto por $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Analogamente, a distância d entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é a norma do vetor diferença, isto é,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

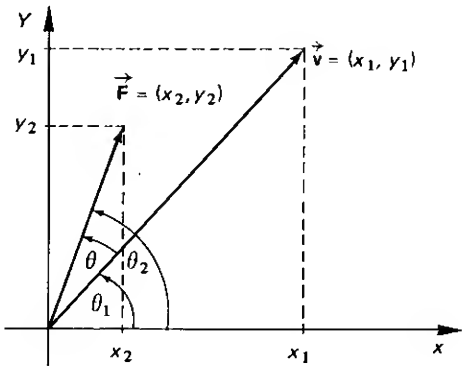


Figura 8.1.2

Consideremos agora um corpo no plano $\mathbf{R}^2$ que se desloca em linha reta da origem até um ponto (x_1, y_1) por ação de uma força constante $\mathbf{F} = (x_2, y_2)$. Queremos saber qual é o trabalho realizado. Dos conceitos da física sabemos que o trabalho é dado pela equação: $T = \|\mathbf{F}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\theta$ onde θ é o ângulo entre $\mathbf{v} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{F} = (x_2, y_2)$. Mas $\cos\theta = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_2\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{x_2}{\|\mathbf{F}\|} \cdot \frac{x_1}{\|\mathbf{v}\|} + \frac{y_2}{\|\mathbf{F}\|} \cdot \frac{y_1}{\|\mathbf{v}\|}$. Portanto, $T = x_1x_2 + y_1y_2$. Ou seja, o trabalho produzido é um "produto" dos vetores v e F, denotado por $\langle \mathbf{v}, \mathbf{F}\rangle$, e dado pela regra: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{F}\rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$. Este produto recebe o nome de produto escalar ou produto interno, e tem uma relação importante com a norma de um vetor $\mathbf{v} = (x, y)$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x \cdot x + y \cdot y} = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}.$$

Se, ao invés de trabalharmos no plano $\mathbf{R}^2$, estivéssemos trabalhando no espaço $\mathbf{R}^3$ (munidos de um referencial cartesiano ortogonal), teríamos encontrado uma expressão similar para o produto escalar:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

e a mesma relação com a norma de um vetor $\mathbf{v} = (x, y, z)$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}.$$

Voltando ao caso do plano, se tivéssemos trabalhado com um referencial não ortogonal (eixos não perpendiculares), e quiséssemos calcular a distância da origem até um ponto P (cujas coordenadas em relação ao referencial fossem (x, y)), teríamos, usando o teorema de Pitágoras,

$$d = \|(x, y)\| = \sqrt{(x + y\cos\alpha)^2 + (y\operatorname{sen}\alpha)^2} = \sqrt{x^2 + (2\cos\alpha)xy + y^2}$$

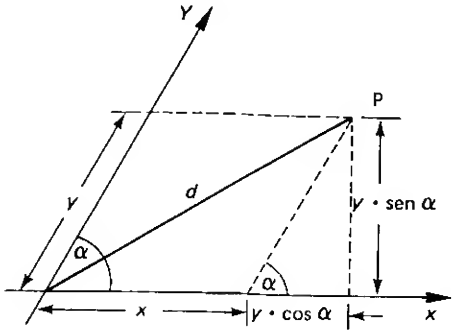


Figura 8.1.3

Observe que, se usássemos o produto escalar

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

neste caso não valeria a relação $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}$, mas ela passaria a valer se usássemos a seguinte regra para o produto:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + (\cos\alpha)x_1y_2 + (\cos\alpha)x_2y_1 + y_1y_2$$ pois $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \langle (x, y), (x, y)\rangle = x^2 + (\cos\alpha)xy + (\cos\alpha)yx + y^2 = \|\mathbf{v}\|^2$.

Portanto, novamente a noção de distância poderia ser dada a partir de um produto interno de vetores.

Concluímos destes exemplos, que o processo usado para se determinar medidas num espaço pode variar e, em cada caso, precisamos ser bem claros sobre que produto interno (e conseqüentemente sobre que norma) estamos trabalhando. Estes produtos, no entanto, gozam de propriedades que são utilizadas para definir produto interno num espaço vetorial real qualquer.

8.1.1 Definição: Seja V um espaço vetorial real. Um *produto interno* sobre V é uma função que a cada par de vetores, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, associa um número real, denotado $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle$, satisfazendo as propriedades:

i) $\langle v, v\rangle \geqslant 0$ para todo vetor v, e
$\langle v, v\rangle = 0$ se, e somente se $v = 0$.
ii) $\langle \alpha v_1, v_2\rangle = \alpha\langle v_1, v_2\rangle$ para todo real α.
iii) $\langle v_1 + v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_2, v_3\rangle$.
iv) $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_2, v_1\rangle$.

8.1.2 Exemplos

Exemplo 1: O produto escalar usual de vetores do espaço $\mathbf{R}^3$.

Para $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$
$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

De modo análogo, define-se o que chamamos produto interno usual para o espaço $\mathbf{R}^n$:

Dados $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $w = (y_1, y_2, ..., y_n)$,
$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$

Veremos em 9.1.1 que, uma vez escolhido um tipo especial de base, todo produto interno tem uma expressão como esta.

Exemplo 2: $V = \mathbf{R}^2$, $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$
$\langle v_1, v_2\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2$

Exemplo 3: Se V é o espaço de funções contínuas no intervalo [0, 1], dadas f_1 e $f_2 \in V$, definimos

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_0^1 f_1(t)f_2(t)\,dt$$

Poderemos verificar que as quatro condições da definição são satisfeitas em cada exemplo e, portanto, $\langle\ ,\rangle$ é um produto interno.

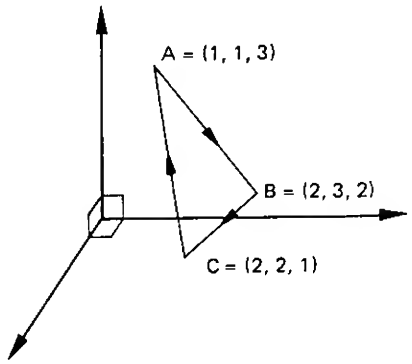


Figura 8.1.4

Exemplo 4: Um campo elétrico uniforme induz uma força constante dada pelo vetor $f = (10, 2, -5)$ em uma partícula carregada eletricamente. Vamos calcular o trabalho realizado quando a partícula se move na trajetória que começa e termina em A, dada pela Figura 8.1.4. O trabalho total é

$$T = T_{AB} + T_{BC} + T_{CA}$$

onde T_{AB} é o trabalho realizado de A a B etc. Ainda, $\mathbf{AB} = (2, 3, 2) - (1, 1, 3) = (1, 2, -1)$, $\mathbf{BC} = (0, -1, -1)$ e $\mathbf{CA} = (-1, -1, 2)$. Como foi mostrado na introdução, o trabalho é o produto interno da força pelo vetor que dá o deslocamento. Então $T_{AB} = \langle f, AB\rangle = \langle(10, 2, -5), (1, 2, -1)\rangle = 19$, $T_{CA} = -22$. Portanto, $T = 0$.

Exemplo 5: Uma fábrica produz um determinado componente eletrônico. Devido a variações na linha de produção, qualidade de material etc., verifica-se que os componentes não têm todos a mesma durabilidade. Fazendo-se experiências com relação ao número de horas de uso efetivo, obtém-se a seguinte tabela que relaciona durabilidade com a respectiva probabilidade.

durabilidade/h	2000	2500	2700	3000
probabilidade	1/3	1/5	1/5	4/15

Queremos saber a durabilidade média dos componentes.

Temos, então, a durabilidade média (ou valor médio ou valor esperado) que é

$$2000(1/3) + 2500(1/5) + 2700(1/5) + 3000(4/15) = 2520 \text{ horas.}$$

O que queremos observar, no entanto, é que a expressão da durabilidade média é exatamente a do produto interno canônico em $\mathbf{R}^4$ do vetor probabilidade $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{15})$ pelo vetor durabilidade (2000, 2500, 2700, 3000), isto é,

$$\langle(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{15}), (2000, 2500, 2700, 3000)\rangle$$

De modo geral, se uma grandeza pode assumir valores $x_1, x_2, ..., x_n$ com probabilidades $p_1, p_2, ..., p_n$, respectivamente, então o valor médio da grandeza (também chamado valor esperado) é dado pelo produto interno canônico em $\mathbf{R}^n$

$$\langle(p_1, p_2, ..., p_n), (x_1, x_2, ..., x_n)\rangle = p_1x_1 + ... + p_nx_n$$

Biblioteca de Ciência & Tecnologia
UFPel

Na seção 8.7 você poderá ver uma outra versao deste fato, juntamente com outras aplicações estatísticas do produto interno.

O produto interno é usado para caracterizar a noção de perpendicularismo ou ortogonalidade de vetores. Formalmente:

8.1.3 Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Diz-se que dois vetores v e w de V são *ortogonais* (em relação a este produto interno) se $\langle v, w\rangle = 0$. No caso em que v e w são ortogonais, escrevemos $v \perp w$.

Propriedades:

i) $\mathbf{0} \perp v$ para todo $v \in V$.
ii) $v \perp w$ implica que $w \perp v$.
iii) Se $v \perp w$ para todo $w \in v$, então $v = \mathbf{0}$.
iv) Se $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$, então $v_1 + v_2 \perp w$.
v) Se $v \perp w$ e λ é um escalar, $\lambda v \perp w$.

Vamos demonstrar a primeira delas e voce poderá provar facilmente as outras, usando as propriedades do produto interno.

i) Para mostrar que $\mathbf{0}$ é ortogonal a todo vetor v, lembremos que $\mathbf{0} = 0 \cdot v$ e, portanto, $\langle \mathbf{0}, v\rangle = \langle 0 \cdot v, v\rangle = 0\langle v, v\rangle = 0$.

A noção de ortogonalidade tem uma aplicação interessante na verificação da "honestidade" de apostas. Vejamos isto em um exemplo.

Exemplo: Duas pessoas A e B fazem a seguinte aposta: elas vão jogar duas moedas simultaneamente e, se o resultado for duas caras, A ganha dez cruzeiros, se for duas coroas, A ganha sete cruzeiros, e se for uma cara e uma coroa, B ganha 9 cruzeiros. Queremos saber se esta aposta é justa, isto é, se A não tem mais probabilidade de ganhar do que B, ou vice-versa.

Para isto, vamos calcular o valor esperado por A e B. Observamos então que a probabilidade de dar duas caras é 1/4, de dar duas coroas é 1/4 e de dar uma cara e uma coroa é 1/2. O vetor probabilidade é então (1/4, 1/4, 1/2) e o vetor aposta do ponto de vista de A é (10, 7, -9) e do ponto de vista de B é (-10, -7, 9), onde o sinal menos indica a perda da aposta. O valor esperado por A é dado pelo produto interno

$$\langle (1/4,\ 1/4,\ 1/2)\ ,\ (10,\ 7,\ -9)\rangle = \frac{1}{4}(10) + \frac{1}{4}(7) - \frac{1}{2}(9) = -\frac{1}{4}$$

enquanto que o valor esperado por B é

$$\langle (1/4,\ 1/4,\ 1/2),\ (-10,\ -7,\ 9)\rangle = \frac{1}{4}\ .$$

O valor esperado por B é positivo, indicando que ele tem vantagem na aposta, enquanto que o valor esperado por A é negativo, indicando que ele tem maior probabilidade de perder a aposta. Esta só seria justa se não houvesse vantagem para nenhum dos apostadores, isto é, se o valor esperado para ambos fosse nulo, ou seja, o vetor probabilidade fosse ortogonal ao vetor aposta.

O resultado a seguir estabelece uma relação entre ortogonalidade e independência linear.

8.1.4 Teorema: Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjunto de vetores não nulos, dois a dois ortogonais, isto é,

$\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$. Então $\{v_1, ..., v_n\}$ é linearmente independente.

Prova: Seja $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = \mathbf{0}$.
Fazendo o produto interno dos dois membros da igualdade acima por v_i, temos:

$$\langle a_1v_1 + ... + a_nv_n,\ v_i\rangle = \langle 0,\ v_i\rangle$$

e, portanto, $a_1\langle v_1, v_i\rangle + ... + a_i\langle v_i, v_i\rangle + ... + a_n\langle v_n, v_i\rangle = 0$.
Como $\langle v_j, v_i\rangle = 0$ para $j \neq i$ e $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0$, temos $a_i\langle v_i, v_i\rangle = 0$
e assim $a_i = 0$.

Como isto vale para todo $i = 1, ..., n$, temos $a_1 = 0, ..., a_n = 0$; logo $\{v_1, ..., v_n\}$ é LI.

Você já deve ter notado que quando se trabalha no espaço ($\mathbf{R}^3$), em geral é mais simples usarmos a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Isso se deve em grande parte à característica de que estes vetores são dois a dois ortogonais. A conveniência de bases desse tipo se mantém para espaços vetoriais quaisquer, como você verá em 8.2.

8.1.5 Definição: Diz-se que uma base $\{v_1, ..., v_n\}$ de V é *base ortogonal* se $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$, isto é, os vetores da base são dois a dois ortogonais.

Observe que, pelo teorema anterior, se obtivermos um conjunto de n vetores dois a dois ortogonais num espaço de dimensão n, este conjunto será uma base ortogonal.

8.2 COEFICIENTES DE FOURIER

Bases ortogonais são importantes porque existe um procedimento padrão para se encontrar as coordenadas de um vetor qualquer em relação a elas. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortogonal de V e w um vetor qualquer de V. Vamos calcular as coordenadas de w

em relação a β. Sabemos que $w = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$ e queremos determinar a i-ésima coordenada x_i. Para isto, façamos o produto interno dos dois membros da igualdade acima por v_i. Então $\langle w, v_i\rangle = x_i\langle v_i, v_i\rangle$

donde $x_i = \dfrac{\langle w, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}$. Esta coordenada é chamada *coeficiente de Fourier* de w em relação a v_i.

8.2.1 Exemplos

Exemplo 1: Seja $V = \mathbf{R}^2$ com produto interno usual e

$$\beta = \{(1, 1), (-1, 1)\}.$$

Observamos que β é uma base ortogonal, pois $\langle(1, 1), (-1, 1)\rangle = 1(-1) + 1(1) = 0$. Calculemos $[(2, 3)]_\beta$.
Existem x_1 e x_2 tais que

$$(2, 3) = x_1(1, 1) + x_2(-1, 1),$$

onde x_1 e x_2 são as coordenadas do vetor (2, 3) em relação à base β que estamos procurando.

$$\begin{aligned}\langle(2, 3), (1, 1)\rangle &= \langle x_1(1, 1) + x_2(-1, 1), (1, 1)\rangle \\ &= \langle x_1(1, 1), (1, 1)\rangle + \langle x_2(-1, 1), (1, 1)\rangle \\ &= x_1\langle(1, 1), (1, 1)\rangle + x_2\langle(-1, 1), (1, 1)\rangle\end{aligned}$$

O segundo termo, $x_2\langle(-1, 1), (1, 1)\rangle$, é nulo e assim,

$$x_1 = \frac{\langle(2, 3), (1, 1)\rangle}{\langle(1, 1), (1, 1)\rangle} = \frac{5}{2}$$

Analogamente, $$x_2 = \frac{\langle(2, 3), (-1, 1)\rangle}{\langle(-1, 1), (-1, 1)\rangle} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $$[(2, 3)]_\beta = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Vamos formalizar agora a noção de comprimento de um vetor num espaço vetorial. Faremos isto de tal forma que seja verdadeira a relação vista em 8.1, entre produto escalar e norma.

8.3 NORMA

8.3.1 Definição: Seja V um espaço com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Definimos a *norma* (ou comprimento) de um vetor v em relação a este produto interno por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Se $\|v\| = 1$, isto é, $\langle v, v\rangle = 1$, v é chamado *vetor unitário*. Dizemos também, neste caso, que v está *normalizado*.

Observe que todo vetor não nulo $v \in V$ pode ser normalizado, tornando $u = \dfrac{v}{\|v\|}$. Se considerarmos, por exemplo, $V = \mathbf{R}^3$ e $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno usual, então se $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ que é o comprimento do vetor v. Assim, para $v = (1, 2, -1)$, teremos o vetor normalizado.

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(1, 2, -1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

A noção de norma formaliza o conceito de comprimento.

Exemplo: Vamos calcular a força (que é um vetor) de atração entre dois corpos de massas 2 e 5 unidades, colocados nos pontos (1, 3, 5) e (2, 1, 0), respectivamente, sabendo que a intensidade da atração entre eles é dada pela relação $\dfrac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$, onde m_1 é a massa do primeiro corpo, m_2 a do segundo e d a distância entre eles, e sabendo ainda que a força age na direção da reta que une os dois pontos.

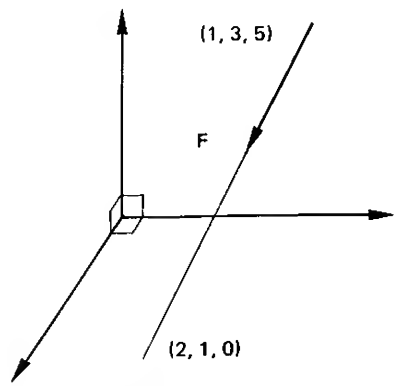


Figura 8.3.1

Vemos que F deve ser um vetor na direção e sentido de $(2, 1, 0) - (1, 3, 5) = (1, -2, -5)$ e deve ter intensidade $\dfrac{2 \cdot 5}{\|(1, -2, -5)\|^2} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$ ou seja, $F = \dfrac{1}{3}u$, onde u é um vetor unitário na direção de $(1, -2, -5)$. Portanto,

$$u = \frac{(1, -2, -5)}{\|(1, -2, -5)\|} = (1/\sqrt{30}\ ,\ -2/\sqrt{30}\ ,\ 5/\sqrt{30}\ )$$

e $F = \frac{1}{3}\ (1/\sqrt{30},\ -2/\sqrt{30},\ 5/\sqrt{30}\ ) = (1/3\sqrt{30}\ ,\ -2/3\sqrt{30}\ ,\ 5/3\sqrt{30}\ )$

Vejamos agora que a definição formal de norma tem realmente todas as propriedades que esperamos de uma noção de comprimento.

Propriedades: Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para quaisquer v, w em V e $\alpha \in \mathbf{R}$.

i) $\|v\| \geqslant 0$ e $\|v\| = 0$ se, e somente se $v = 0$.
ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$
iii) $|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\,\|w\|$ (Desigualdade de Schwarz)
iv) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (Desigualdade triangular)

Prova: Você pode mostrar *i*) e *ii*) a partir das propriedades do produto interno.
iii) Sejam v e w em V com $v \neq 0$. (Para $v = 0$ vale a igualdade $|\langle v, w\rangle| = \|v\|\,\|w\| = 0$.)

Para qualquer $t \in \mathbf{R}$, $\langle tv + w, tv + w\rangle \geqslant 0$, isto é,

$$\langle v, v\rangle t^2 + 2\langle v, w\rangle t + \langle w, w\rangle \geqslant 0$$

Temos então um trinômio do 2º grau que deve ser positivo para qualquer valor de t. Como o coeficiente $\langle v, v\rangle$ de t^2 é sempre positivo ($v \neq 0$), o discriminante Δ deve ser negativo: $\Delta = 4\langle v, w\rangle^2 - 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle \leqslant 0$.
Isto é, $4\langle v, w\rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \leqslant 0$, o que implica que $|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\,\|w\|$.
iv) A desigualdade triangular você pode fazer como exercício.

8.3.2 Ângulo entre dois vetores

A desigualdade de Schwarz nos dá a possibilidade de definir *ângulo* entre dois vetores não nulos em um espaço vetorial V munido de um produto interno. Sejam $v, w \in V$ não nulos. Então 8.3.1 (*iii*) pode ser escrito como

$\frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|} \leqslant 1$ ou seja $\left|\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right| \leqslant 1$, e portanto existe um ângulo θ entre 0 e π radianos tal que $\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$. Este ângulo θ é chamado ângulo entre v e w. Observe que esta noção é compatível com a noção de ortogonalidade pois, se $\langle v, w\rangle = 0$, então $\cos\theta = 0$; logo $\theta = \pi/2$.

Seria muito interessante se você verificasse agora que se considerarmos o plano $\mathbf{R}^2$ ou o espaço $\mathbf{R}^3$ com o produto interno usual, o conceito geral de ângulo aqui definido coincidirá com o conceito geométrico de ângulo entre dois vetores.

Exemplo: Sejam $V = M(2, 2)$, as matrizes quadradas de ordem 2 reais e o produto interno dado pela expressão (comprove que realmente é um produto interno, testando as propriedades):

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = ae + 2bf + 3cg + dh$$

Vamos calcular o ângulo entre as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, segundo este produto interno. Então

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1,$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = 2 \quad \text{e} \quad \left\| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{10}$$

Portanto, $\cos\theta = 1/2\sqrt{10}$ e assim, $\theta = \arccos 1/2\sqrt{10}$.

Em 8.7 você poderá ver que a noção de correlação usada em estatística provém do conceito de ângulo entre dois vetores.

Também utiliza-se o conceito de norma para caracterizar o tipo de base que, em geral, é mais conveniente quando se trabalha com um determinado produto interno. Numa base deste tipo as coordenadas de um vetor são dadas por um produto interno.

8.3.3 Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno. Diz-se que uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V é *ortonormal* se for ortogonal e cada vetor for unitário, isto é,

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Observe que se tivermos uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$, os coeficientes x_i de um vetor $w = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ são dados por

$$x_i = \frac{\langle w, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} = \langle w, v_i\rangle .$$

Exemplo: Seja $V = \mathbf{R}^2$ e $\langle , \rangle$ o produto interno usual e $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ uma base ortonormal, temos $x_1 = \langle v, e_1\rangle$ e $x_2 = \langle v, e_2\rangle$.

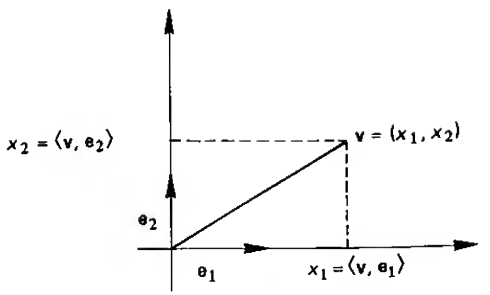


Figura 8.3.2

8.4 PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

A partir de uma base qualquer de um espaço vetorial existe um processo para se obter uma base ortonormal. Inicialmente vamos dar uma descrição deste processo de ortonormalização para uma base $\beta = \{v_1, v_2\}$.

Seja $v_1' = v_1$. Precisamos encontrar a partir de v_2 um novo vetor v_2 ortogonal a v_1', isto é, $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$. Para isto tomamos $v_2' = v_2 - cv_1'$, onde c é um número escolhido de modo que $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, isto é, $\langle v_2 - cv_1', v_1' \rangle = 0$.

Isto significa que $c = \dfrac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$.

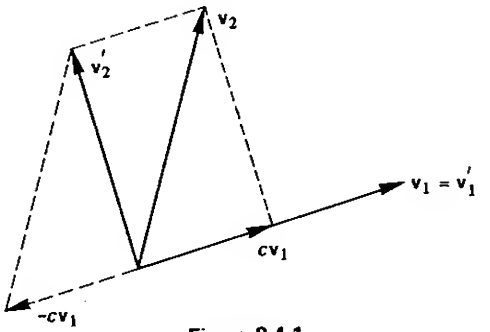


Figura 8.4.1

Ficamos então com

$$v_1' = v_1$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

Observe que v_2' foi obtido de v_2, subtraindo-se deste a projeção do vetor v_2 na direção de v_1',

$$\frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} \cdot v_1',$$

e que v_1' e v_2' são vetores ortogonais não nulos. Podemos então normalizá-los,

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$$

obtendo uma base $\beta' = \{u_1, u_2\}$ que é ortonormal. Como você pode afirmar que u_1 e u_2 são LI? (Veja 8.1.5)

8.4.1 Exemplo

Exemplo 1: Seja $\beta = \{(2, 1), (1, 1)\}$ uma base do $\mathbf{R}^2$. Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

Sejam $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (1, 1)$.

$v_1' = v_1 = (2, 1)$
$v_2' = v_2 - cv_1'$

Como já vimos, a condição de que v_2' seja ortogonal a v_1' implica que

$$c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$$

e, portanto,

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = (1, 1) - \frac{\langle (1, 1), (2, 1) \rangle}{\langle (2, 1), (2, 1) \rangle} (2, 1) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Normalizando estes vetores obtemos:

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ e } u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Então, $\beta' = \{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal.

O procedimento de ortogonalização de dois vetores pode ser generalizado para uma base $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$. Tomemos como no caso anterior

$$v_1' = v_1$$

$$v_2' = v_2 - cv_1' \text{ onde } c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$$

Então, v_1' é ortogonal a v_2'.

Vamos procurar agora um vetor v_3' que seja ortogonal ao mesmo tempo a v_1' e v_2'. Por analogia ao caso anterior vamos estabelecer que $v_3' = v_3 - mv_2' - kv_1'$ e determinar os valores de m e k tais que $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$ e $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$. Desenvolvendo estas duas condições, obtemos:

$$\langle v_3', v_1' \rangle = 0 \iff \langle v_3 - mv_2' - kv_1', v_1' \rangle = 0$$
$$\iff \langle v_3, v_1' \rangle - m\langle v_2', v_1' \rangle - k\langle v_1', v_1' \rangle = 0$$

Assim, como $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, temos $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$ se, e somente se

$$k = \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$$

Da mesma forma, $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$ se, e somente se

$$m = \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle}$$

E portanto,

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

Observe que k e m são os coeficientes de Fourier de v_3 com relação a v_1' e a v_2' respectivamente, ou seja, v_3' é obtido de v_3, subtraindo-se suas projeções sobre v_1' e v_2'.

Procedendo de maneira análoga, obtemos os vetores $v_4', \ldots, v_n'$.

Assim, a partir de uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial V, construímos a base ortogonal $\{v_1', \ldots, v_n'\}$ dada por:

$$v_1' = v_1$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

$$\vdots$$

$$v_n' = v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}' \rangle}{\langle v_{n-1}', v_{n-1}' \rangle} v_{n-1}' - \ldots - \frac{\langle v_n, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

Este procedimento é conhecido como *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.*

Se quisermos agora obter uma base ortonormal, basta normalizarmos os vetores v_i'. Isto é, tomando

$u_i = \dfrac{v_i'}{\|v_i'\|}$, obtemos a base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de vetores ortonormais.

Exemplo 2: Seja $\beta = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1)\}$ uma base de $\mathbf{R}^3$. Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto usual.

Sejam $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.

$$v_1' = v_1 = (1, 1, 1)$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = (0, 2, 1) - \frac{\langle (0, 2, 1), (1, 1, 1) \rangle}{\langle (1, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle} (1, 1, 1) =$$
$$= (0, 2, 1) - \frac{3}{3}(1, 1, 1) = (-1, 1, 0).$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$
$$= (0, 0, 1) - \frac{\langle (0, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle}{\langle (-1, 1, 0), (-1, 1, 0) \rangle} (-1, 1, 0) -$$
$$- \frac{\langle (0, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle}{\langle (1, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle} (1, 1, 1) = (0, 0, 1) - 0 - \frac{1}{3}(1, 1, 1) =$$
$$= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Então os vetores normalizados são

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$u_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 2\right)$$

e $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal.

Observe no exemplo que, dos vetores originais da base β o único que foi preservado, pelo menos em sua direção, foi o vetor v_1 a partir do qual foi iniciado o processo de ortogonalização. Vale a pena notar que partindo da mesma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ poderemos obter uma outra base ortogonal β'' iniciando, por exemplo, o processo de ortogonalização a partir de $v_3 (v_1' = v_3 = (0, 0, 1))$. Neste caso, os cálculos seriam simplificados pois v_3 já é um vetor unitário. Obteremos assim $\beta'' = \{w_1, w_2, w_3\}$, onde o vetor cuja direção é preservada é v_3, e não mais v_1.

Exemplo 3: Seja $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbf{R}^2$. Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto interno de $\mathbf{R}^2$, definido por

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2 .$$

Sejam $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$.

$v_1' = v_1 = (1, 0)$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = (0, 1) - \frac{\langle (0, 1), (1, 0) \rangle}{\langle (1, 0), (1, 0) \rangle} (1, 0) = (0, 1) +$$

$$+ \frac{1}{2} (1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

Normalizando estes vetores obtemos:

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right)$$

Assim, $\beta' = \{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal em relação ao produto interno definido acima. Observe que a base inicial β é uma base ortonormal em relação ao produto interno usual de $\mathbf{R}^2$, mas não em relação ao produto aqui definido.

8.5 COMPLEMENTO ORTOGONAL

Consideremos um espaço vetorial V munido de um produto interno $\langle , \rangle$ e um subconjunto não vazio S de V. (S não é necessariamente um subespaço.) Consideremos então o subconjunto de V:

$$S^{\perp} = \{v \in V: v \text{ é ortogonal a todos os vetores de } S\}.$$

Valem os seguintes resultados com relação a S.

i) $S^{\perp}$ é subespaço de V (mesmo que S não o seja).
De fato, se v_1 e v_2 pertencem a $S^{\perp}$ e w é um vetor qualquer de S, então $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$ e de 8.1.4. (*iv*) $v_1 + v_2 \perp w$, ou seja, $v_1 + v_2 \in S^{\perp}$. Analogamente, usando 8.1.4, (*v*) $\lambda v_1 \perp w$ para qualquer $\lambda \in \mathbf{R}$.

ii) Se S é subespaço de V, então $V = S \oplus S^{\perp}$ (veja 4.3.5).
e $S^{\perp}$ é chamado *complemento ortogonal* de S. Para mostrar isto, basta tomar uma base ortogonal de S $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ (veja 8.4), estendê-la a uma base de V, $\{v_1, ..., v_k w_{k+1}, ..., w_n\}$ e aplicar o processo de Gram-Schmidt, observando que $v_1, ..., v_k$ não mudam no processo. Obtém-se assim uma base ortonormal de V, $\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$. Note que $\{v_{k+1}, ..., v_n\}$ é uma base de $S^{\perp}$ (verifique). Assim,

$$V = [v_1, ..., v_k] \oplus [v_{k+1}, ..., v_n] = S \oplus S^{\perp}.$$

8.6 ESPAÇOS VETORIAIS COMPLEXOS – PRODUTO INTERNO

No Capítulo 4, quando introduzimos espaços vetoriais reais, comentamos que se os escalares fossem números complexos, (**C**) teríamos um espaço vetorial complexo. O que queremos nesta secção é ressaltar um fato importante que ocorre com o produto interno num espaço vetorial complexo.

Observe o que ocorreria se tivéssemos V, um espaço vetorial sobre C, munido de um produto interno $\langle , \rangle$ segundo a definição 8.1.1 e quiséssemos, dado v não nulo em V, calcular o produto $\langle w, w \rangle$ onde $w = iv$. Então, por um lado, pela condição (*i*) de 8.1.1, temos $\langle w, w \rangle > 0$. Por outro lado, $\langle w, w \rangle = \langle iv, iv \rangle = i\langle v, iv \rangle = i\langle iv, v \rangle = i^2 \langle v, v \rangle = -1 \langle v, v \rangle < 0$ pois $\langle v, v \rangle > 0$. Então $\langle w, w \rangle$ deve ser ao mesmo tempo maior que 0 e menor que 0, o que é absurdo! Isto quer dizer que as duas condições *i*) $\langle v, v \rangle \geqslant 0$ para todo v e *iv*) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ para quaisquer v, w são incompatíveis quando estamos trabalhando com espaços vetoriais complexos. Sendo assim, precisamos de uma nova definição.

8.6.1 Definição: Seja V um espaço vetorial complexo. Um *produto interno* sobre V é uma aplicação

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbf{C}$$
$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

que satisfaz as seguintes condições:

i) $\langle v, v \rangle \geqslant 0$ para todo $v \in V$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se $v = 0$.

ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$, para todo $\alpha \in \mathbf{C}$ e $u, v \in V$.

iii) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ para todo $u_1, u_2, v \in V$.

iv) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ para todo $u, v \in V$.

Observe que a condição (*iv*) foi mudada em relação ao produto interno definido sobre **R**. Ela nos diz que $\langle u, v \rangle$ é o conjugado de $\langle v, u \rangle$.

Exemplo: Sejam $V = \mathbf{C}^3$, $v_1, v_2 \in V$ com $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ e $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$. A expressão

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3$$

define um produto interno em $\mathbf{C}^3$. Verifiquemos a condição (*iv*).

$$\overline{\langle v_2, v_1 \rangle} = \overline{y_1 \bar{x}_1 + y_2 \bar{x}_2 + y_3 \bar{x}_3} = \overline{y_1 \bar{x}_1} + \overline{y_2 \bar{x}_2} + \overline{y_3 \bar{x}_3} = \bar{y}_1 \bar{\bar{x}}_1 + \bar{y}_2 \bar{\bar{x}}_2 + \bar{y}_3 \bar{\bar{x}}_3 = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3 = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Um exemplo importante de espaço vetorial complexo é dado pelo conjunto das soluções de um sistema de equações diferenciais lineares. Ele será apresentado no Capítulo 12.

Do mesmo modo que definimos os conceitos fundamentais (norma, distância, ortogonalidade etc.) num espaço vetorial real com um produto interno, podemos defini-los num espaço vetorial complexo. Por exemplo, a norma de um vetor $v = (x_1, x_2, x_3) \in C^3$ em relação ao produto interno dado no exemplo anterior é

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2}$$

Não vamos tratar mais detalhadamente sobre este assunto porque, neste livro, estamos mais interessados em espaços vetoriais reais.

8.7 PRODUTO INTERNO E ESTATÍSTICA

Uma situação que aparece freqüentemente na análise de experimentos é a seguinte: verifica-se que o fenômeno estudado tem n possibilidades distintas S_1, S_2, ..., S_n de se manifestar, cada uma delas com probabilidades p_1, p_2, ..., p_n, respectivamente. O conjunto $S = \{S_1, ..., S_n\}$ é chamado *espaço amostral* e o vetor $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ é chamado *vetor de probabilidades*. Por exemplo, no lançamento de uma moeda, podemos considerar $S = \{$cara, coroa$\}$ e $\mathbf{p} = (1/2, 1/2)$; no lançamento simultâneo de duas moedas, $S =$ $= \{$(cara, cara), (coroa, coroa), (cara, coroa)$\}$ e $\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/2)$; num grupo de 3 pessoas podemos considerar $S = \{$pessoa 1, pessoa 2, pessoa 3$\}$ e $\mathbf{p} =$ $= (1/3, 1/3, 1/3)$ se cada uma delas tiver a mesma probabilidade de ser escolhida ao acaso.

Se em um espaço amostral $S = \{S_1, ..., S_n\}$, com respectivo vetor de probabilidade $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$, associarmos, a cada elemento S_i do espaço amostral, um valor X_i, teremos o vetor $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ que chamaremos de *variável aleatória*. Vejamos alguns exemplos.

8.7.1 Exemplos

Exemplo 1: Se duas pessoas A e B fazem a seguinte aposta: lançam uma moeda e, se der cara, A ganhará 10 fichas e, se der coroa, B ganhará 10 fichas. Então teremos $S = \{$cara, coroa$\}$, $\mathbf{p} = (1/2, 1/2)$, a variável aleatória do ponto de vista de A será $\mathbf{X} = (10, -10)$ e a variável aleatória do ponto de vista de B será $\mathbf{Y} = (-10, 10)$.

Exemplo 2: Num grupo de três pessoas A, B, C que pesam 70 kg, 80 kg e 50 kg, respectivamente, podemos considerar $S = \{A, B, C\}$, $\mathbf{p} =$ $= (1/3, 1/3, 1/3)$ e a variável aleatória $\mathbf{X} = (70, 80, 50)$.

Exemplo 3: À situação escrita no Exemplo de 8.1.3 podemos associar o espaço amostral $S = \{$(cara, cara), (coroa, coroa), (cara, coroa)$\}$, o vetor de probabilidades $\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/2)$ e as variáveis aleatórias $\mathbf{X} = (10, 7, -9)$ que dá a aposta de A, e $\mathbf{Y} = (-10, -7, 9)$ que dá a aposta de B.

Dado um espaço amostral $S = \{S_1, ..., S_n\}$, o vetor de probabilidades $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ e uma variável aleatória $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$, denominamos de *valor médio* de $\mathbf{X}$ (ou *valor esperado*) ao número

$$\bar{X} = p_1X_1 + p_2X_2 + .. + p_nX_n,$$

de *variança de* $\mathbf{X}$ ao número

$$V(\mathbf{X}) = p_1(X_1 - \bar{X})^2 + ... + p_n(X_n - \bar{X})^2$$

e de *desvio padrão* de $\mathbf{X}$ ao número

$$D(\mathbf{X}) = \sqrt{V(\mathbf{X})}.$$

A ligação destes conceitos com o conceito de produto interno é estabelecida da seguinte forma: nas condições anteriores, consideremos em $\mathbf{R}^n$ o seguinte produto interno

$$\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\rangle = p_1x_1y_1 + ... + p_nx_ny_n$$

Temos então que, em relação a este produto interno

$$\bar{X} = \langle \mathbf{X}, (1, ..., 1)\rangle$$

$$V(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X} - \bar{X}(1, ..., 1), \mathbf{X} - \bar{X}(1, ..., 1)\rangle$$

$$D(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X} - \bar{X}(1, .., 1)\|.$$

Você pode verificar tranqüilamente estas igualdades.

8.7.2 Exemplos

Exemplo 1: O produto interno associado é

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}y_1y_2$$

Então $\bar{X} = \langle (10, -10), (1, 1)\rangle = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 + \frac{1}{2}(-10) \cdot 1 = 0$ e $D(\mathbf{X}) =$ $= \|(10, 10) - 0(1, 1)\| = \|(10, 10)\| = \sqrt{(1/2)10^2 + (1/2)10^2} = 10$. (Faça o mesmo para a variável aleatória Y.)

Exemplo 2: O produto interno é

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = \frac{1}{3}x_1x_2 + \frac{1}{3}y_1y_2 + \frac{1}{3}z_1z_2$$

Então $\overline{X} = \langle(70, 80, 50), (1, 1, 1)\rangle = \frac{1}{3} \cdot 70 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 80 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 1 =$

$= \frac{200}{3}$, isto é, o valor médio da função aleatória peso (o peso médio) é 200/3 e o desvio padrão é

$$D(\mathbf{X}) = \|(70, 80, 50) - \frac{200}{3}(1, 1, 1)\| = \|(10/3, 40/3, -50/3)\| =$$

$$= \sqrt{(1/3)(10/3)^2 + (1/3)(40/3)^2 + (1/3)(-50/3)^2} = \frac{10}{3}\sqrt{14}$$

Exemplo 3: O produto interno é

$$\langle(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{1}{4}y_1y_2 + \frac{1}{2}z_1z_2$$

Então $\overline{X} = \langle(10, 7, -9), (1, 1, 1)\rangle = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 7 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1 = -\frac{1}{4}$

$$D(\mathbf{X}) = \|(10, 7, -9) - (-\frac{1}{4})(1, 1, 1)\| = \|(\frac{41}{4}, \frac{29}{4}, -\frac{35}{4})\| \cong 15{,}3$$

(Compare com o Exemplo de 8.1.3.)

Consideremos agora uma situação em que a um dado fenômeno associamos o espaço amostral $S = \{S_1, ..., S_n\}$, o vetor probabilidade $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$, e dois aspectos do fenômeno são representados por duas variáveis aleatórias $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, ... Y_n)$. Estamos interessados em descobrir qual é a relação entre **X** e **Y**. Sejam $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ os valores médios correspondentes a X e Y. Considerando os vetores

$$\mathbf{X} - \overline{X}(1, ..., 1) = (X_1 - \overline{X}, ..., \overline{X}_n - \overline{X})$$

e

$$\mathbf{Y} - \overline{Y}(1, ..., 1) = (Y_1 - \overline{Y}, ..., \overline{Y}_n - \overline{Y})$$

Vejamos o que acontece se existir um número λ tal que

$$(Y_1 - \overline{Y}, ..., Y_n - \overline{Y}) = \lambda(X_1 - \overline{X}, ..., X_n - \overline{X})$$

Neste caso podemos concluir que se **X** mudar, **Y** mudará proporcionalmente, ou seja, chegaremos à conclusão que os aspectos **X** e **Y** estudados estão fortemente relacionados. Mas a existência deste número λ é equivalente à condição de que os vetores tenham a mesma direção, ou seja, o ângulo θ entre eles é 0 ou π, e portanto $\cos\theta = 1$ ou -1.

Assim, chegamos à conclusão, que o valor do co-seno do ângulo entre os vetores $\mathbf{X} - \overline{X}(1, ..., 1)$ e $\mathbf{Y} - \overline{Y}(1, ..., 1)$ é uma medida da relação entre **X** e **Y**. A este valor os estatísticos chamam de *coeficiente de correlação linear* entre

X e **Y** e denotam-se por $r(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Aplicando a fórmula do co-seno do ângulo entre dois vetores, temos:

$$r(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\langle \mathbf{X} - \overline{X}(1, ..., 1), \mathbf{Y} - \overline{Y}(1, ..., 1)\rangle}{\|\mathbf{X} - \overline{X}(1, ..., 1)\| \cdot \|\mathbf{Y} - \overline{Y}(1, ..., 1)\|}$$

Observamos que o produto interno indicado é aquele montado a partir do vetor de probabilidades e que quanto mais próximo $r(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ estiver de 1 ou -1 mais podemos dizer que **X** e **Y** estão correlacionados linearmente.

Exemplo 4: Consideremos um grupo de 10 alunos do qual conhecemos as notas de Matemática e Física dadas pela tabela abaixo.

	Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Notas	Matemática	2	8	5	7	7	5	3	1	9	9
	Física	1	9	7	2	7	4	6	3	9	7

Queremos saber qual é a correlação entre os resultados nas duas matérias. Para isto, consideremos como espaço amostral o conjunto dos alunos, numerados de 1 a 10, $S = \{1, 2, . ., 10\}$. Como a probabilidade de se considerar as notas de qualquer aluno é igual, o vetor probabilidade é, então, $\mathbf{p} = (\frac{1}{10}, ..., \frac{1}{10})$, a variável aleatória que dá as notas de Matemática é $\mathbf{X} = (2, 8, 5, 7, 7, 5, 3, 1, 9, 9)$ e a que dá as notas de Física é $\mathbf{Y} = (1, 9, 7, 2, 7, 4, 6, 3, 9, 7)$. Calculando, temos $\overline{X} = 5{,}6$ e $\overline{Y} = 5{,}5$.

$\mathbf{X} - \overline{X}(1, ..., 1) = (-3{,}6;\ 2{,}4;\ -0{,}6;\ ...;\ -4{,}6;\ 3{,}4;\ 3{,}4)$
$\mathbf{Y} - \overline{Y}(1, ..., 1) = (-4{,}5;\ 3{,}5;\ 1{,}5;\ ...;\ -2{,}5;\ 3{,}5;\ 1{,}5)$
$\langle \mathbf{X} - \overline{X}(1, ..., 1), \mathbf{Y} - \overline{Y}(1, ..., 1)\rangle \cong 4{,}9$
$\|\mathbf{X} - \overline{X}(1, ..., 1)\|^2 \cong 7{,}4$ e $\|\mathbf{Y} - \overline{Y}(1, ..., 1)\|^2 \cong 7{,}2$

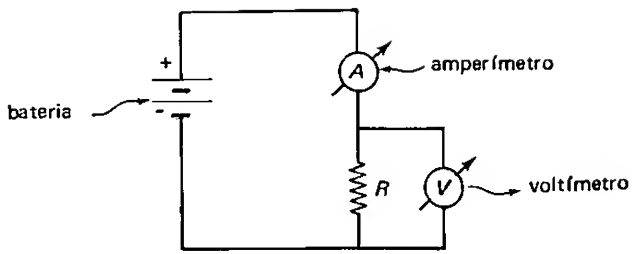
e o coeficiente de correlação é

$$r(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cong 0{,}67$$

*8.8 O AJUSTE DE CURVAS E O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Consideremos a experiência na qual se utilizou o circuito abaixo para determinar o valor da resistência R de um resistor.

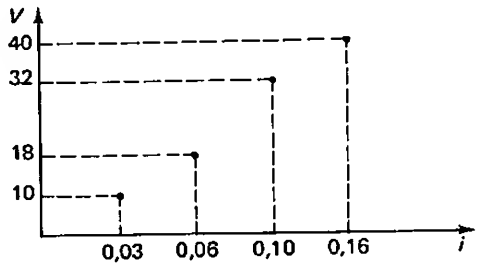
Biblioteca de Ciência & Tecn UFP



Feitas as medidas de corrente para vários valores de voltagem, os dados foram tabelados

i = corrente (Ampère)	0,03	0,06	0,10	0,16
V = voltagem (Volts)	10,0	18,0	32,0	40,0

e a seguir colocados em um gráfico



A partir destes dados, se quisermos obter a relação entre corrente e voltagem, inclusive para pontos intermediários ou exteriores aos tabelados, deveremos propor uma curva (uma função) que se ajuste aos pontos tabelados. A proposta de tal função deverá levar em consideração que:

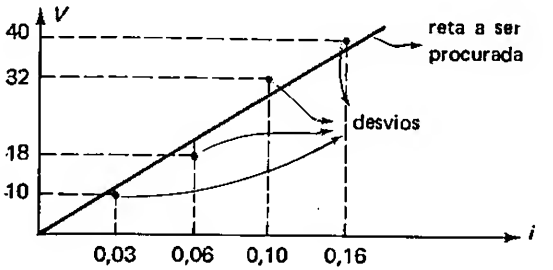
i) Qualquer medida contém um erro (inerente ao aparelho de medição, falha do operador etc.)

ii) Pode já existir algum argumento teórico ou de bom senso que nos indique qual deve ser o aspecto analítico da função.

O item (*i*) nos mostra que exigir que a curva procurada passe por todos os pontos não é somente desnecessário mas, provavelmente, errado, enquanto que o item (*ii*) nos mostra que deveremos ter alguma argumentação convincente para fazer previsões. Juntos, estes itens mostram que entre todas as funções com um determinado aspecto analítico deveremos procurar aquela que, em um certo sentido, melhor se ajuste aos pontos da tabela. Na experiência que estamos considerando, por exemplo, existe uma fundamentação

teórica que relaciona a corrente com a voltagem: $V = R \cdot i$, isto é, o gráfico de V em função de i deve ser uma reta passando pela origem e com certa inclinação R que mede a resistência. Devemos, portanto, estabelecer um mecanismo que forneça o "melhor ajuste" aos dados de que dispomos.

Como fazer isto? Uma idéia é a de que a reta procurada deve ser tal que torne pequenos os desvios (isto é, a diferença entre o valor dado na tabela e o valor dado pela reta) em cada um dos pontos da tabela. Mas como garantir isto? O método que escolheremos será exposto na secção seguinte.



8.8.1 O Método dos Mínimos Quadrados

Observemos inicialmente que se temos funções tabeladas

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...	$f(x_n)$

de forma que os valores da variável independente $x_1, x_2, ..., x_n$ são sempre os mesmos, cada uma dessas funções pode ser considerada como um vetor de um espaço vetorial (o das funções definidas nos pontos $x_1, x_2, ..., x_n$). Tal espaço é isomorfo ao $\mathbb{R}^n$ (veja 5.3.12) e nele é que trabalharemos.

Vamos generalizar um pouco a situação da introdução para podermos utilizar a linguagem da Álgebra Linear é resolver o problema.

Suponhamos que conhecemos o aspecto analítico de duas funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$ e que queremos "aproximar" uma dada função $f(x)$ por uma combinação linear de $g_1(x)$ e $g_2(x)$, isto é, queremos achar coeficientes c_1 e c_2 tais que a função

$$g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$$

seja uma "boa aproximação" para $f(x)$. Por exemplo, se $g_1(x) \equiv 1$ e $g_2(x) = x$, estaremos aproximando $f(x)$ por uma função afim $g(x) = c_1 + c_2 x$; se $g_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $g_2(x) = \cos x$ estaremos aproximando por $g(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ etc.

Vamos introduzir agora uma noção de distância entre funções. Para isto, lembramos que se tivermos um produto interno $<,>$ num espaço vetorial podemos construir uma noção de distância entre dois elementos v_1 e v_2 como a norma da diferença entre eles.

$$\text{distância entre } v_1 \text{ e } v_2 = \|v_1 - v_2\| = \sqrt{<v_1 - v_2, v_1 - v_2>}$$

Definimos, então, o seguinte produto interno (verifique se realmente é um) no espaço vetorial definido no início da secção.

8.8.2 $$<f_1, f_2> = f_1(x_1) \cdot f_2(x_1) + f_1(x_2) \cdot f_2(x_2) + \ldots + f_1(x_n) \cdot f_2(x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) \cdot f_2(x_i)$$

Com relação a tal produto interno a distância entre duas funções é dada pela expressão

8.8.3 $$\|f_1 - f_2\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_1(x_i) - f_2(x_i))^2}$$

Observe que a expressão dentro do radical é exatamente a soma dos quadrados dos desvios que existem entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$ em cada ponto x_i da tabela.

Lembrando que se sabemos que a soma de certos números positivos é pequena então podemos concluir que cada um desses números é pequeno, teremos a chave para descobrir os coeficientes c_1 e c_2: devemos calcular a distância entre $f(x)$ e $g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$ a qual, evidentemente, será função de c_1 e c_2, e então minimizá-la seguindo os procedimentos normais de minimização de funções de várias variáveis (consulte Leithold, L., "O Cálculo com Geometria Analítica", Edit. Harper & Row, SP, 1977).

Seguindo este caminho teremos a distância entre $f(x)$ e $g(x)$ dada por

$$D(c_1, c_2) = \|f - c_1 g_1 - c_2 g_2\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))^2}$$

Achando o ponto (c_1, c_2) que minimiza tal função (isto é, achamos os pontos críticos $\frac{\partial D}{\partial c_1} = 0$ e $\frac{\partial D}{\partial c_2} = 0$ etc.) teremos que os valores c_1 e c_2 que fornecem a função $g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ devem satisfazer o sistema linear:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} g_1(x_i) g_1(x_i)\right) c_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} g_1(x_i) g_2(x_i)\right) c_2 = \sum_{i=1}^{n} g_1(x_i) f(x_i)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} g_2(x_i) g_1(x_i)\right) c_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} g_2(x_i) g_2(x_i)\right) c_2 = \sum_{i=1}^{n} g_2(x_i) f(x_i)$$

ou, lembrando a definição do produto interno 8.8.2.

8.8.4 $$\begin{cases} <g_1, g_1> c_1 + <g_1, g_2> c_2 = <g_1, f> \\ <g_2, g_1> c_1 + <g_2, g_2> c_2 = <g_2, f> \end{cases}$$

Como conhecemos a expressão de $g_1(x)$ e $g_2(x)$, os valores de $f(x)$ nos pontos x_i da tabela e os produtos internos só dependem dos valores das funções nestes pontos, podemos resolver o sistema e obter os valores de c_1 e c_2. Este procedimento é chamado o *método dos mínimos quadrados para ajuste de curvas.*

Exemplo: Ajustar uma função do tipo $g(x) = a + bx$ aos pontos da tabela

x	0	1	2
$f(x)$	1,1	0,1	-3,1

Temos $g(x) = a \cdot 1 + b \cdot x^2$, ou seja, $g_1(x) \equiv 1$ e $g_2(x) = x^2$

Então
$$<g_1, g_1> = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$
$$<g_1, g_2> = <g_2, g_1> = 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = 5$$
$$<g_2, g_2> = 0^2 \cdot 0^2 + 1^2 \cdot 1^2 + 2^2 \cdot 2^2 = 17$$
$$<g_1, f> = 1 \cdot 1{,}1 + 1 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot (-3, 1) = -1{,}9$$
$$<g_2, f> = 0^2 \cdot 1{,}1 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot (-3{,}1) = -12{,}3$$

Daí
$$\begin{cases} 3a + 5b = -1{,}9 \\ 5a + 17b = -12{,}3 \end{cases}$$

Resolvendo temos $a \cong 1{,}12$ e $b \cong -1{,}05$. Portanto, entre as funções do tipo $a + bx^2$ a que melhor se ajusta aos dados da tabela é $0{,}912 - 0{,}927x^2$. (Trace os gráficos.)

Podemos interpretar intuitivamente a fórmula 8.8.3 (na verdade a argumentação a seguir pode ser demonstrada rigorosamente).

Observe a Figura 8.8.1 onde f representa a função tabelada, g_1 e g_2 as funções cujo aspecto analítico conhecemos e o plano representa o subespaço

gerado por g_1 e g_2. A função $g = c_1g_1 + c_2g_2$ procurada é o ponto do plano que está à menor distância de f.

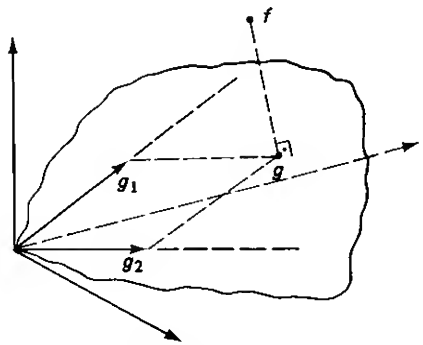


Figura 8.8.1

Intuitivamente sabe-se que tal ponto é o pé da perpendicular ao plano (isto pode ser provado rigorosamente). Portanto o vetor $f - g$ é perpendicular a g_1 e g_2 (que estão no plano). Devemos ter então

$$0 = \langle g_1, f-g \rangle = -c_1\langle g_1, g_1\rangle - c_2\langle g_1, g_2\rangle + \langle g_1, f\rangle$$
$$0 = \langle g_2, f-g \rangle = -c_1\langle g_2, g_1\rangle - c_2\langle g_2, g_2\rangle + \langle g_2, f\rangle$$

que são exatamente as relações de 8.8.3.

Toda a argumentação anterior pode ser facilmente repetida no caso de termos um número k (k = 1, 2, 3, ...) de funções $g_i(x)$ ao invés de apenas duas. Formalmente:

8.8.5 Se quisermos achar coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que a função $g(x) = c_1g_1(x) + c_2g_2(x) + \ldots + c_kg_k(x)$ é aquela que melhor aproxima uma função tabelada $f(x)$ no sentido do *método dos mínimos quadrados*, tais coeficientes satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1k}c_k = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \ldots + a_{kk}c_k = b_k \end{cases}$$

onde $a_{ij} = \langle g_i, g_j \rangle$
$b_i = \langle g_i, f \rangle$

e $\langle , \rangle$ é o produto interno dado por 8.8.2.

8.8.6 Exemplos

Exemplo 1: Vamos resolver o problema do início da secção. Nesse problema a corrente i faz o papel de x, $k = 1$ e $g_1(i) = i$. Segundo o resultado de 8.8.5, R deve satisfazer

$$\langle V, g_1 \rangle = R \langle g_1, g_1 \rangle$$

Como $\langle g_1, g_1 \rangle = (0{,}03)^2 + (0{,}06)^2 + (0{,}10)^2 + (0{,}16)^2 = 0{,}0401$
$\langle V, g_1 \rangle = 10 \cdot 0{,}03 + 18 \cdot 0{,}06 + 32 \cdot 0{,}10 + 40 \cdot 0{,}16 = 10{,}98$

Portanto $R = \dfrac{10{,}98}{0{,}0401} \cong 273{,}81$ ohms

Exemplo 2: Sabendo que a população de uma certa localidade variou com o tempo segundo a tabela

Ano	1940	1950	1960	1970
População X 10^4	1,0	1,5	1,8	2,0

,

aproximando os pontos da tabela por uma função do tipo (t = tempo)

$$g(t) = a + bt + ct^2,$$

qual será a população em 1990?

No contexto de 8.8.5 teremos $k = 3$, $g_1(t) \equiv 1$, $g_2(t) = t$, $g_3(t) = t^2$. Além disso, para os números se tornarem menores, identificaremos $t = 4$ com 1940, $t = 5$ com 1950 etc. Dessa forma 1990 será representado com $t = 9$.

Então:
$$\langle g_1, g_1 \rangle a + \langle g_1, g_2 \rangle b + \langle g_1, g_3 \rangle c = \langle g_1, f \rangle$$
$$\langle g_2, g_1 \rangle a + \langle g_2, g_2 \rangle b + \langle g_2, g_3 \rangle c = \langle g_2, f \rangle$$
$$\langle g_3, g_1 \rangle a + \langle g_3, g_2 \rangle b + \langle g_3, g_3 \rangle c = \langle g_3, f \rangle$$

onde
$$\langle g_1, g_1 \rangle = 4, \langle g_1, g_2 \rangle = \langle g_2, g_1 \rangle = 22, \langle g_2, g_2 \rangle = 126,$$
$$\langle g_1, g_3 \rangle = \langle g_3, g_1 \rangle = 126, \langle g_2, g_3 \rangle = \langle g_3, g_2 \rangle = 748,$$
$$\langle g_3, g_3 \rangle = 4578, \langle g_1, f \rangle = 6{,}3, \langle g_2, f \rangle = 36{,}3, \langle g_3, f \rangle = 216{,}3$$

Substituindo e resolvendo o sistema temos $a = -2{,}415$, $b = 1{,}155$ e $c = -0{,}075$. Assim $g(t) = -2{,}415 + 1{,}155t - 0{,}075t^2$ e a população prevista para 1990 será dada por $g(9) = 1{,}905$, ou seja, $1{,}905 \cdot 10^4 = 19\,050$ pessoas.

Uma vez entendido o ponto de vista técnico, vamos discutir a confiabilidade dos resultados obtidos. Em particular, você confia no resultado do último exemplo? Por que foi proposta uma função do tipo $g(t) = a + bt + ct^2$ para aproximar a tabela e não outra? A resposta a esta questão é dada no item (*ii*) discutido no início da secção, isto é, devemos ter alguma funda-

mentação teórica sobre o fenômeno que estamos estudando (no caso dinâmica populacional) para então propor o tipo de função. Na verdade a função quadrática proposta no exemplo não satisfaz a este requisito; ela foi proposta apenas para exercitar a técnica. Um tipo de função que descreve um pouco melhor a dinâmica populacional, apesar de não levar em conta uma série de fatores, é $g(t) = ae^{bt}$, com a e b a serem determinados. Vamos refazer o problema nesta nova condição, lembrando-nos que, nos problemas de previsão, a não confiabilidade dos resultados não é devida a Matemática, mas sim a quem propôs o modelo teórico.

Exemplo 3: No exemplo anterior, prever a população aproximando os pontos da tabela, utilizando uma função do tipo $g(t) = ae^{bt}$.

Notamos que na forma como foi apresentado o problema não poderemos usar diretamente 8.8.5, pois a função $g(t)$ proposta para aproximar *não é uma combinação linear* de funções conhecidas. Vamos colocá-la noutra forma. Utilizando o símbolo $\cong$ para "aproximadamente", observamos que o problema original é achar a e b tais que

$$f(t) \cong a \cdot e^{bt}$$

Aplicando o logaritmo neperiano a ambos os membros, temos

$$F(t) = \ln f(t) \cong \ln a + bt$$

Chamando $c_1 = \ln a$, $c_2 = b$, $g_1(t) \equiv 1$ e $g_2(t) = t$, temos

$$\ln f(t) \cong c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)$$

Isto é, o problema fica no contexto de 8.8.5 se aproximarmos não a tabela original, mas a tabela modificada.

	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$
Ano	1940	1950	1960	1970
$F(t) = \ln f(t)$	0,0	0,405	0,588	0,693

Assim $< g_1, g_1 > = 4$, $< g_1, g_2 > = < g_2, g_1 > = 22$, $< g_2, g_2 > = 126$
$< g_1, F > = 1{,}686$, $< g_2, F > = 10{,}404$

Temos então o sistema

$$\begin{cases} 4c_1 + 22c_2 = 1{,}686 \\ 22c_1 + 126c_2 = 10{,}404 \end{cases}$$

que resolvido fornece $c_1 \cong 0{,}226$, $c_2 = -0{,}822$. Donde $a = e^{c_1} = 0{,}439$ e $b = c_2 = 0{,}226$. Assim $g(t) = 0{,}439e^{0{,}226t}$ e $g(9) = 3{,}356$. A população prevista será de cerca de $3{,}356 \cdot 10^4 = 33\,560$ pessoas.

Compare este resultado com o do Exemplo anterior. Qual deles você acha melhor? Por quê?

Em geral sempre que temos uma proposta para aproximarmos uma tabela por uma função não linear fazemos certas modificações para obter uma situação linear, e então usamos 8.8.5.

Uma palavra final deve ser dada com relação à nomenclatura. Os estatísticos ao utilizarem o método dos mínimos quadrados chamam-no de *análise de regressão*. Assim, fazer *regressão linear, quadrática* ou *exponencial* significa aproximar os dados de uma tabela por uma função do tipo $a + bx$, $a + bx + cx^2$ ou $a \cdot e^{bx}$, respectivamente, utilizando o método dos mínimos quadrados (8.8.5).

8.9 EXERCÍCIOS

1. Comprove que as funções definidas nos exemplos do parágrafo 8.1 são produtos internos.

2. Seja $V = \mathbf{R}^2$. Sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$. Se $f(v_1, v_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$, mostre que f é um produto interno.

3. Mostre a desigualdade triangular. (Veja 8.3.2 - *iv*) (Sugestão: $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle$; desenvolva e use a desigualdade de Schwarz - 8.3.2 - *iii*).

4. Seja $\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Use o processo de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal β' de $\mathbf{R}^2$ em relação ao produto interno usual.

5. Seja $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$. Ache uma base ortonormal β' de $\mathbf{R}^3$, em relação ao produto interno usual.

6. Seja $\beta = \{(-1, 1), (1, 1)\}$. Ache uma base ortonormal β' de $\mathbf{R}^2$, em relação ao produto interno definido no Exercício 2.

7. Determine uma base ortonormal (em relação ao produto interno canônico) para o seguinte subespaço de $\mathbf{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x - y + z = 0\}$$

8. Seja $W \subset \mathbf{R}^3$ o subespaço gerado por $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$.
   a) Considere $W^\perp$ em relação ao produto interno canônico. Encontre uma base para $W^\perp$.
   b) A mesma pergunta anterior se $W^\perp$ é considerado em relação ao produto interno $< (x, y, z), (x', y', z') > = 2x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$.

Biblioteca de Ciência & Tecno

9. Seja $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$ e seja $W = ker\ T$.

   a) Encontre uma base ortonormal para $W^{\perp}$(em relação ao produto interno canônico de $\mathbf{R}^3$).

   b) O mesmo em relação ao produto interno

$$<(x, y, z), (x', y', z')> = 2x \cdot x' + y \cdot y' + 4z \cdot z'$$

10. Considere o subespaço W de $\mathbf{R}^3$ gerado por $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, -1, -1)$. Sendo $<,>$ o produto interno canônico (*a*) Ache $W^{\perp}$; (*b*) Exiba uma transformação linear $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $Im(T) = W$ e $ker(T) = W^{\perp}$.

11. Considere em $\mathbf{R}^3$ o produto interno

$$<(x, y, z), (x', y', z')> = x \cdot x' + 5y \cdot y' + 2z \cdot z'$$

   a) Verifique se realmente é um produto interno.

   b) A partir da base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ache uma base ortonormal.

12. Seja $\mathbf{P}_2$ o espaço das funções polinomiais reais de grau menor ou igual a dois. Definimos em $\mathbf{P}_2$

$$<f, g> = \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)dt$$

Considere W o subespaço de $\mathbf{P}_2$ gerado pelos vetores $p(t) = 1$ e $q(t) = 1 - t$.

   a) $<f, g>$ é um produto interno?

   b) Se a resposta de (*a*) for afirmativa determine uma base ortogonal para W.

13. Seja $V = \mathbf{R}^3$ e $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$.

   a) Encontre $S^{\perp}$.

   b) Encontre uma base ortogonal para S e $S^{\perp}$.

   c) Se S fosse $[(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)]$, qual seria $S^{\perp}$? Neste caso, encontre uma base ortogonal para S e $S^{\perp}$.

14. Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada. Definimos o traço de $\mathbf{A}$, $Tr(\mathbf{A})$, por $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

   a) Calcule $Tr \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

   b) $Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = Tr(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$?

   c) $Tr(\mathbf{A}) = Tr(\mathbf{A}^t)$?

   d) $Tr(\mathbf{A}) = (Tr(\mathbf{A}^{-1}))^{-1}$?

   e) $Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = Tr(\mathbf{A}) \cdot Tr(\mathbf{B})$?

15. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes de $M(2, 2)$. Define-se

$$<\mathbf{A}, \mathbf{B}> = Tr(\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A})$$

   a) Verifique que $<\mathbf{A}, \mathbf{B}>$ é um produto interno.

   b) Exiba uma base ortonormal segundo este produto interno, a partir da base $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Um corpo é deslocado em linha reta do ponto $(-1, 3)$ até o ponto $(5, 2)$ por uma força constante $\mathbf{F} = (3, 2)$. Qual é o trabalho realizado?

17. Podemos definir uma "distância" entre dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ do plano por $d(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ (veja a Figura 8.9.1). Verifique se a aplicação dada por

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = d(P, Q)$$

define um produto interno no plano.

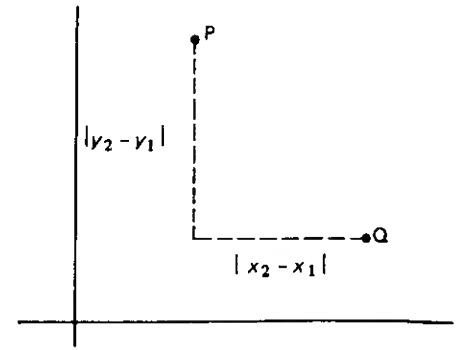


Figura 8.9.1

18. Uma partícula percorre a trajetória OABO onde O, A e B são os pontos $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ respectivamente (a unidade de comprimento é o metro) com velocidade constante de 1 m/seg. Se um campo elétrico induz uma força na partícula dada por

$$\mathbf{f} = \begin{cases} (1, 1, 1) & \text{se} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ (1, 1, -1) & \text{se} \quad 1 \leqslant t < 2 \\ (1, -1, 1) & \text{se} \quad 2 \leqslant t < 3 \\ (-1, 1, 1) & \text{se} \quad 3 \leqslant t < 4 \\ (-1, -1, -1) & \text{se} \quad t \geqslant 4 \end{cases}$$

calcule o trabalho realizado para percorrer esta trajetória uma vez.

19. Em relação ao produto interno do Exemplo de 8.3.2 calcule x de modo que o ângulo entre $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ tenha uma medida de 90°.

*20. Duas pessoas, A e B, fazem a seguinte aposta. A joga uma moeda até que apareça cara. Se ela ocorrer na primeira jogada, B pagará 1 ficha; se não aparecer cara na primeira e sim na segunda jogada B pagará 2 fichas; se ocorrer cara pela primeira vez no terceiro lance, B pagará 4 fichas etc. Em geral, se os primeiros n lances forem coroas e o $(n + 1)$-ésimo lance for cara, B pagará $2n$ fichas, onde $n < 5$, supondo-se que 5 seja o limite máximo de lances. Se todos os cinco lances forem coroa, B pagará 50 fichas. Antes de começar, A paga a B 5 fichas. Quem levará vantagem neste jogo? Quanto A deveria pagar a B no início do jogo para torná-lo justo?

*21. Dez pares de observações foram feitas das variáveis X e Y, resultando no gráfico abaixo.

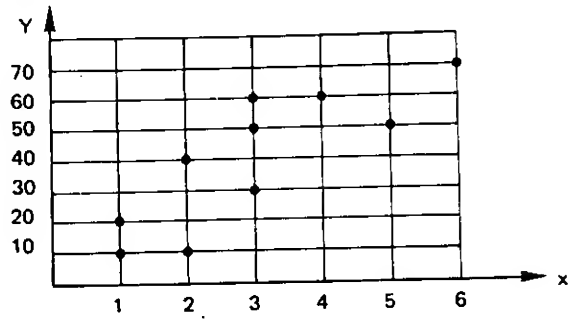


Figura 8.9.2

a) Qual é a correlação entre as duas variáveis?
b) Se as unidades do eixo-x fossem 10, 20 etc., qual seria a correlação?

*22. A tabela seguinte lista o número de acidentes em veículos motorizados na Grande São Paulo em alguns anos entre 1960 e 1978.

Ano	Total de acidentes	Acidentes por 10 000 veículos
1960	16 600	1988
1965	19 800	1587
1970	20 800	1429
1975	26 400	1693
1976	27 200	1718
1977	27 400	1697
1978	29 200	1746

a) Compute a regressão linear de acidentes no tempo. Use-a para prever o número de acidentes em 1980. Isto recebe o nome de *análise de série temporal* (i.e. regressão no tempo para prognóstico futuro).
b) Compute a regressão quadrática do número de acidentes por 10 000 veículos no tempo. Use esta nova regressão para prognosticar o número de acidentes em 1980.
c) Compare estes resultados. Em qual você está propenso a acreditar e por quê?

Sugestão: utilize os resultados de 8.8.

*23. Os dados abaixo representam a produção de soja durante vários anos em um determinado terreno.

Ano	Produção (toneladas)
1969	96,2
1970	92,0
1971	90,1
1972	89,0
1973	86,8
1974	82,6

Utilizando seus conhecimentos teóricos, experimentais e bom senso, faça uma previsão da produção em 1980.

Supondo-se que a produção é economicamente inviável se for inferior a 66,0 toneladas anuais, a partir de que ano deveremos mudar a espécie plantada? Faça uma crítica da sua proposta.

Sugestão: utilize os resultados de 8.8.

8.9.1 Respostas

5. $\beta' = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$

6. $\{(-1, 1), (0, 1)\}$

10. *a*) $W^{\perp}$ é formado pelos vetores ortogonais a todos os vetores de W. Para saber se um vetor está em $W^{\perp}$ é suficiente, porém, que ele seja ortogonal aos vetores de uma base de W (por quê?). Achamos então uma base de W, obtendo:

$$W = [(1, 0, 0), (0, 1, 1)]$$

Portanto $W^{\perp} = \{(x, y, z) \mid < (x, y, z), (1, 0, 0) > = 0 \text{ e } < (x, y, z), (0, 1, 1) > = 0\}$

Mas $< (x, y, z), (1, 0, 0) > = x = 0$
$< (x, y, z), (0, 1, 1) > = y + z = 0$

Assim $W^{\perp} = \{(x, y, z) \mid x = 0 \text{ e } y = -z\}$
$= \{(0, -z, z),\ z \in \mathbf{R}\}$
$= \{z \cdot (0, -1, 1),\ z \in \mathbf{R}\}$
$= [(0, -1, 1)]$

b) Para que $ker\,(T) = W^{\perp}$ devemos ter $T(0, -1, 1) = (0, 0, 0)$. Por outro lado para que $Im\,(T) = W$ cada um dos vetores (1, 0, 0) e (0, 1, 1) deve ser imagem. Observando que $\{(0, -1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ formam uma base de $\mathbf{R}^3$ (por quê?) e que uma transformação linear fica determinada pelo o que ele faz numa base, podemos escolher T tal que

$T(0, -1, 1) = (0, 0, 0), T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ e $T(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$

A seguir achamos a expressão de $T(x, y, z)$.

13. *a*) $S^{\perp} = [(-1, 1, 1)]$
b) S não é subespaço
c) $S = [(1, 0, 1), (1, 2, -1)]$ e $S^{\perp} = [(-1, 1, 1)]$

14. *a*) 7 *b*) sim *c*) sim *d*) não *e*) não

15. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

16. $T = 16$
18. $T = 10 - 7\sqrt{2}$
19. $x = -15$
20. B leva vantagem. 3,69 fichas.
21. 0,82

Leituras Sugeridas e Referências

[1] Hoffman, K. e Kunze, R.; *Álgebra Linear*, Editora Polígono, São Paulo, 1971.
[2] Kemeny, J., Snell. J. e Thompson, G.; *Introduction to Finite Mathematics*; Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1957.
[3] Tetra; *Álgebra Lineal*; Harla, México, D.F.1976.
[4] Leithold, L.; *O Cálculo com Geometria Analítica*; HARBRA, São Paulo, 1977.

9

TIPOS ESPECIAIS DE OPERADORES LINEARES

9.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos estudar dois tipos especiais de operadores. Tais operadores são importantes, não apenas pelas propriedades interessantes que eles possuem, mas também por serem os que mais aparecem em aplicações práticas e, assim sendo, merecem um estudo um pouco mais apurado. Os operadores *auto-adjuntos* aparecem naturalmente em problemas que envolvam simetria e em outras situações como em Mecânica Quântica, onde estão normalmente associados a considerações sobre energia do sistema. Outro tipo de operadores, os *ortogonais*, aparecem na Dinâmica de Corpos Rígidos, ligados a problemas de rotação e translação. No Capítulo 10 você verá o uso desses operadores no estudo de cônicas e quádricas.

Iniciamos o estudo desses operadores fazendo algumas observações.

A primeira delas diz que, ao trabalharmos com base ortonormal, o produto interno poderá ser expresso numa forma canônica (teorema 9.1.1). As outras versarão sobre propriedades de certos tipos especiais de matrizes que caracterizarão os operadores a serem estudados.

9.1.1 Teorema: Sejam V um espaço vetorial real com produto interno $\langle , \rangle$ e $\alpha = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ base ortonormal de V. Então, se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores de V com

$$[\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{w}]_\alpha = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ temos}$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Em outras palavras, ao trabalharmos com uma base ortonormal, para efetuar o produto interno de dois vetores basta multiplicar as coordenadas correspondentes e somar.

Prova: $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + ... + x_n\mathbf{u}_n$

e $\mathbf{w} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + ... + y_n\mathbf{u}_n$.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle &= \langle x_1\mathbf{u}_1 + ... + x_n\mathbf{u}_n, y_1\mathbf{u}_1 + ... + y_n\mathbf{u}_n \rangle \\ &= \langle x_1\mathbf{u}_1 + ... + x_n\mathbf{u}_n, y_1\mathbf{u}_1 \rangle + \langle x_1\mathbf{u}_1 + ... + x_n\mathbf{u}_n, y_2\mathbf{u}_2 \rangle + \\ &\quad + ... + \langle x_1\mathbf{u}_1 + ... + x_n\mathbf{u}_n, y_n\mathbf{u}_n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_1 \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_1 \rangle + \sum_{i=1}^{n} x_i y_2 \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_2 \rangle + ... + \sum_{i=1}^{n} x_1 y_n \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_n \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle.\end{aligned}$$

Mas como $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$,

os únicos termos não nulos são aqueles onde $i = j$. Logo,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

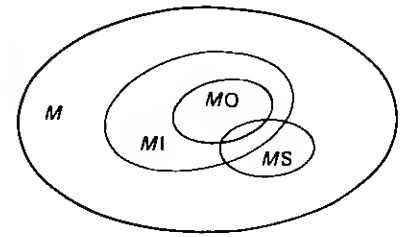
A seguir introduziremos as matrizes que estarão associadas aos operadores a serem estudados.

9.1.2 Definição: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ real e $\mathbf{A}'$ sua transposta.

a) Se $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ dizemos que $\mathbf{A}$ é uma matriz *simétrica*.

b) Se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ (ou seja, a inversa de $\mathbf{A}$ é $\mathbf{A}'$), dizemos que $\mathbf{A}$ é uma matriz *ortogonal*.

No Capítulo 1 já vimos exemplos de matrizes simétricas. Quanto à segunda definição, as matrizes ortogonais determinam um subconjunto das matrizes inversíveis. Efetivamente a relação entre matrizes simétricas, inversíveis e ortogonais é indicada pela figura abaixo.



M : matrizes
MI : matrizes inversíveis
MO: matrizes ortogonais
MS : matrizes simétricas

Figura 9.1.1.

Como exemplos de matrizes ortogonais temos:

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar isto basta multiplicar cada uma pela sua transposta obtendo assim a matriz identidade. Calculando temos, no primeiro caso:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta & 0 \\ 0 & \text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que a transformação associada à primeira matriz é uma rotação. (Veja 5.2.4.)

Consideremos agora três propriedades das matrizes ortogonais.

9.1.3 Teorema: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz ortogonal. Então $\det \mathbf{A} = \pm 1$.

Prova: Como $\mathbf{A}$ é ortogonal, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{I}$.
Então $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}') = \det \mathbf{I}$ e $(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{A}') = 1$
Mas $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$.
Assim $(\det \mathbf{A})^2 = 1$, ou seja, $\det \mathbf{A} = \pm 1$.

9.1.4 Teorema: Uma matriz é *ortogonal* se e somente se as colunas (ou as linhas) são vetores *ortonormais.*

Prova: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Na primeira parte da prova queremos mostrar que se **A** é ortogonal isto implica que

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

são ortonormais (o mesmo vale para as linhas). Para isto, façamos o produto de **A** pela sua transposta.

$$\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + \dots + a_{n1}^2 & \dots & a_{11}a_{1n} + \dots + a_{n1}a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}a_{11} + \dots + a_{nn}a_{n1} & \dots & a_{1n}^2 + \dots + a_{nn}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

pois $\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Observamos que $a_{11}^2 + \dots + a_{n1}^2 = 1$. Mas isto quer dizer que $\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ é unitário.

Da mesma forma, percorrendo a diagonal principal, vemos que cada vetor-coluna da matriz **A** é unitário. O que encontramos saindo desta diagonal? . O elemento na posição i, j $(i \neq j)$ é $a_{1i}a_{1j} + \dots + a_{ni}a_{nj}$ e seu valor deve ser zero.

Mas isto diz que o produto interno de $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ é nulo, ou seja, os

vetores-coluna são dois a dois ortogonais quando $i \neq j$.

Está terminada, então a primeira parte da prova. Ainda falta provar que se os vetores-coluna (linha) de uma matriz forem ortonormais, a matriz será ortogonal. Vamos deixar esta prova para você, já que ela é apenas uma adaptação da prova dada acima. (Veja o Exercício 4 da secção 9.4.)

Apresentaremos agora uma situação onde as matrizes ortogonais ocorrem naturalmente.

Exemplo: Seja $V = \mathbf{R}^2$ e $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta = \{(\cos\theta, -\text{sen}\,\theta), (\text{sen}\,\theta, \cos\theta)\}$ bases ortonormais. Calculemos a matriz de mudança de base $[I]_\beta^\alpha$. (Veja 4.7.). Como β é uma base ortonormal, podemos encontrar as coordenadas dos elementos da base α em relação a β por meio dos coeficientes de Fourier.

$$(1, 0) = \frac{\langle (1, 0), (\cos\theta, -\text{sen}\,\theta)\rangle}{\langle (\cos\theta, -\text{sen}\,\theta), (\cos\theta, -\text{sen}\,\theta)\rangle}(\cos\theta, -\text{sen}\,\theta) +$$

$$+ \frac{\langle (1, 0)\ (\text{sen}\,\theta, \cos\theta)\rangle}{\langle (\text{sen}\,\theta, \cos\theta), (\text{sen}\,\theta, \cos\theta)\rangle}(\text{sen}\,\theta, \cos\theta) =$$

$$= \cos\theta\ (\cos\theta, -\text{sen}\,\theta) + \text{sen}\,\theta\ (\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$$

Analogamente,

$$(0, 1) = -\text{sen}\,\theta\ (\cos\theta, -\text{sen}\,\theta) + \cos\theta\ (\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$$

Assim

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Observe que esta matriz é ortogonal (veja o Exemplo de 9.1.2). Tal resultado vale em geral.

9.1.5 Teorema: Se V é um espaço vetorial com produto interno e α e β são bases ortonormais de V, então a matriz de mudança de base $[I]_\beta^\alpha$ é uma matriz ortogonal.

Prova: Sejam $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ e $\beta = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ e

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Biblioteca de Ciência & Tecnologia UFPe

Como β é base, existem números a_{ij} tais que

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + \ldots + a_{n1}w_n \\ &\vdots \qquad\qquad \ldots \\ v_n &= a_{1n}w_1 + \ldots + a_{nn}w_n \end{aligned}$$

Mas α é ortonormal e por isso cada v_i é unitário. Isto é, $1 = \langle v_i, v_i \rangle$. Além disso, β é ortonormal e assim podemos encontrar $\langle v_i, v_i \rangle$ multiplicando as coordenadas. (Veja 9.1.1.) Portanto $1 = a_{1i}^2 + \ldots + a_{ni}^2$. Em outras palavras, cada vetor-coluna de $[I]_\beta^\alpha$ é unitário. Mostraremos agora que estes vetores são ortogonais e portanto $[I]_\beta^\alpha$ é ortogonal. (Veja 9.1.4.)

Como v_i e v_j são ortogonais quando $i \neq j$, $0 = \langle v_i, v_j \rangle = a_{1i}a_{1j} + \ldots + a_{ni}a_{nj}$, ou seja, $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ são ortogonais sempre que $i \neq j$.

Assim a afirmação de que $[I]_\beta^\alpha$ é ortogonal é verdadeira.

Observamos, então, que nesta situação

$$[I]_\alpha^\beta \, ([I]_\alpha^\beta)' = \mathbf{I},$$

ou seja, $([I]_\alpha^\beta)' = ([I]_\alpha^\beta)^{-1}$, e ainda mais

$$([I]_\alpha^\beta)' = [I]_\beta^\alpha$$

Isto facilita o processo seguido para se encontrar $[I]_\alpha^\beta$ conhecendo $[I]_\beta^\alpha$ onde α e β são bases ortonormais. $[I]_\alpha^\beta$ é nada mais que a transposta de $[I]_\beta^\alpha$. Estamos agora em condições de introduzir os conceitos de operador ortogonal e auto-adjunto.

9.2 OPERADORES AUTO-ADJUNTOS E ORTOGONAIS

Agora definiremos os operadores associados às matrizes estudadas em 9.1, estabeleceremos relações entre estes e o produto interno e descobriremos as particularidades de seus autovalores. Isto nos permitirá chegar a importantes resultados sobre diagonalização na próxima secção.

9.2.1 Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno, α uma base ortonormal e $T: V \to V$ um operador linear. Então

a) T é chamado um *operador auto-adjunto* se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica.

b) T é chamado um *operador ortogonal* se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz ortogonal.

Os operadores auto-adjuntos (ou ortogonais) estão bem definidos no sentido de que o fato de um operador ser auto-adjunto (ou ortogonal) não depende da base ortonormal escolhida, isto é, se $[T]_\alpha^\alpha$ for simétrica (ou ortogonal) numa determinada base ortonormal α, então $[T]_\beta^\beta$ também será simétrica (ou ortogonal) para qualquer outra base ortonormal β. Mostremos este fato no caso do operador ser auto-adjunto. (O caso ortogonal é demonstrado de maneira similar.)

Sejam α e β bases ortonormais e suponhamos que $[T]_\alpha^\alpha$ seja simétrica. Queremos mostrar que $[T]_\beta^\beta$ também é simétrica, isto é, $([T]_\beta^\beta)' = [T]_\beta^\beta$.

Observamos que

$$[T]_\beta^\beta = ([I]_\alpha^\beta)^{-1} \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta$$

Também

$$([I]_\alpha^\beta)^{-1} = ([I]_\alpha^\beta)'$$

pois α e β são ortonormais (Veja 9.1.5). Então

$$[T]_\beta^\beta = ([I]_\alpha^\beta)' \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta$$

Tomando a transposta temos

$$\begin{aligned} ([T]_\beta^\beta)' &= ([I]_\alpha^\beta)' \cdot ([T]_\alpha^\alpha)' \cdot [I]_\alpha^\beta \\ &= ([I]_\alpha^\beta)' \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta \\ &= [T]_\beta^\beta \end{aligned}$$

pois $([I]_\alpha^\beta)'' = [I]_\alpha^\beta$ e $[T]_\alpha^\alpha$ é simétrica.

9.2.2 Exemplos

Exemplo 1: Consideremos $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, a rotação de um ângulo θ em torno do eixo-z. Podemos expressar T por:
$T(x, y, z) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta, z)$. (Verifique.)

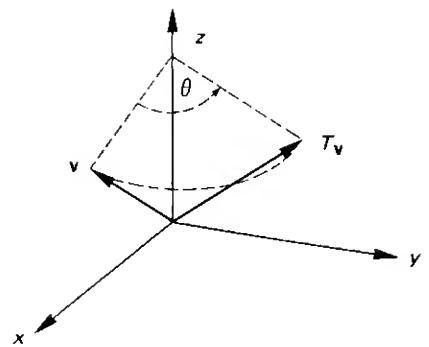


Figura 9.2.1

Tomando a base canônica α e calculando a matriz de T nesta base, temos

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Já vimos que esta matriz é ortogonal e portanto T é um operador ortogonal.

Exemplo 2: Seja $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ onde $T(x, y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$.

Se α é a base canônica de $\mathbf{R}^2$, a matriz de T é $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, uma matriz simétrica, e portanto T é operador auto-adjunto.

Estudemos agora as propriedades destes operadores.

9.2.3 Teorema: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e $T:V \to V$ linear. Então T auto-adjunto implica que $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{w}\rangle$ para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Prova: (caso $n = 2$)
Sejam $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ uma base ortonormal, $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + y_1\mathbf{v}_2$ e

$\mathbf{w} = x_2\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2$ ou $[\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{w}]_\alpha = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Como T é auto-adjunto, $[T]_\alpha^\alpha$ é simétrica.

Seja $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

Então $[T\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ bx_1 + cy_1 \end{bmatrix}$ e $[T\mathbf{w}]_\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} ax_2 + by_2 \\ bx_2 + cy_2 \end{bmatrix}$$

Assim $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = (ax_1 + by_1)x_2 + (bx_1 + cy_1)y_2$
e $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{w}\rangle = x_1(ax_2 + by_2) + y_1(bx_2 + cy_2)$ e portanto, $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{w}\rangle$.

9.2.4 Teorema: Seja $T:V \to V$ auto-adjunto e λ_1, λ_2 autovalores distintos de T e $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ os autovetores associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Então $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.
Prova:

$$\lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle \lambda_1\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle T\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2\rangle =$$
$$= \langle \mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2\rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle$$

Então $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 0$.
Como $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, vem que $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 0$ ou $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.

As propriedades dadas a seguir são conseqüências dos resultados anteriores mas são tão importantes que as destacaremos numa secção especial.

9.3 DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES AUTO-ADJUNTOS E CARACTERIZAÇÃO DOS OPERADORES ORTOGONAIS

O teorema 9.2.4 nos dá uma idéia de que, com relação à diagonalização, os operadores auto-adjuntos comportam-se de uma maneira especial. Por exemplo, se $T:V \to V$ for auto-adjunto, dim $V = n$ e T admitir n autovalores distintos (portanto uma base de autovetores), então T é diagonalizável e os autovetores são automaticamente dois a dois ortogonais e, após a normalização, podem ser transformados em ortonormais. Isto é, T, além de ser diagonalizável, admite uma base *ortonormal* de autovetores. Tal propriedade continua valendo em geral e é característica dos operadores auto-adjuntos. Temos assim:

9.3.1 Teorema: Seja $T:V \to V$ um operador auto-adjunto. Então existe uma base ortonormal de autovetores de T.

Se você está interessado na demonstração desse teorema, siga cuidadosamente as etapas enunciadas nos Exercícios 10, 11 e 12 da secção 9.4.

9.3.2 Exemplos

Exemplo 1: Seja $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é

$$[T] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Podemos exibir uma base ortonormal de autovetores para este operador? Inicialmente observamos que T é um operador auto-adjunto pois a base canônica é ortonormal (em relação ao produto interno canônico) e a matriz é simétrica. O teorema 9.3.1 garante, então, a existência de uma base ortonormal de autovetores. Calculando os autovalores e autovetores associados temos:

Para $\lambda_1 = -2$, $v_1 = (1, 0, 0)$; para $\lambda_2 = 7$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e para $\lambda_3 = 5$, $v_3 = (0, 1, -1)$.

Como estes autovetores provêm de autovalores distintos e T é auto-adjunto, o teorema 9.2.4 garante que eles são ortogonais. Então $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ é uma base ortogonal de autovetores. Basta agora normalizá-los para obtermos a base procurada:

$$\{(1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)\}.$$

Exemplo 2: Seja o operador linear $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exibamos uma base ortonormal de autovetores para este operador. Procedendo de modo análogo ao anterior, vemos que T é auto-adjunto e portanto tal base existe. Calculando os autovalores e autovetores associados temos: Para $\lambda_1 = 0$, os autovetores são do tipo $(-y, y, y)$ e o subespaço destes autovetores tem dimensão 1. Para $\lambda_2 = 3$ os autovetores são do tipo $(y + z, y, z)$ e o subespaço associado tem dimensão 2.

Vamos construir uma base de autovetores escolhendo um autovetor do subespaço associado a $\lambda_1 = 0$ e dois autovetores LI do subespaço associado a $\lambda_2 = 3$. Suponhamos que $v_1 = (-1, 1, 1)$ tenha sido tomado no primeiro subespaço. Como todos os autovetores no segundo são da forma $(y + z, y, z)$, observamos que o produto interno de $(-1, 1, 1)$ com qualquer da forma $(y + z, y, z)$ é 0. Mas não é garantido que quaisquer dois vetores de $(y + z, y, z)$ são ortogonais, mesmo que sejam LI. Por exemplo, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ são LI mas não ortogonais. Contudo, podemos usar o vetor $(1, 1, 0)$ e procurar outro vetor do tipo $(y + z, y, z)$ que seja ortogonal a $(1, 1, 0)$, isto é, o produto interno destes deve ser nulo. Ou seja,

$$y + z + y = 2y + z = 0 \quad \text{ou} \quad z = -2y$$

Um vetor que satisfaça estas relações deve ser do tipo $(-y, y, -2y)$. Por exemplo $(-1, 1, -2)$.

Ficamos assim com a base $\{(-1, 1, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, -2)\}$ que é formada de autovetores dois a dois ortogonais. Normalizando estes vetores temos a base procurada:

$$\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, -2)\}$$

Suponhamos que α seja uma base ortonormal qualquer de V e β a base ortonormal de autovetores dada pelo teorema 9.3.1. Observemos a relação entre $[T]^\alpha_\alpha$ e $[T]^\beta_\beta$. Temos $[T]^\alpha_\alpha = [I]^\beta_\alpha \cdot [T]^\beta_\beta \cdot [I]^\alpha_\beta = ([I]^\alpha_\beta)^{-1} \cdot [T]^\beta_\beta \cdot [I]^\alpha_\beta$ e portanto, $[T]^\alpha_\alpha = ([I]^\alpha_\beta)^t \cdot [T]^\beta_\beta \cdot [I]^\alpha_\beta$ pois α e β são ortonormais. Isto será utilizado na classificação das cônicas.

O teorema seguinte caracteriza as transformações ortogonais.

9.3.3 Teorema: Seja $T:V \to V$ um operador linear num espaço vetorial V com produto interno $\langle , \rangle$. Então as condições abaixo são equivalentes:

a) T é ortogonal.

b) T transforma bases ortonormais em bases ortonormais. Isto é, se $\{v_1, ..., v_n\}$ é base ortonormal de V, então $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ é uma base ortonormal.

c) T preserva o produto interno, isto é, $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$.

d) T preserva a norma, isto é, $\|Tv\| = \|v\|$.

Prova: A demonstração é deixada como exercício.

O item (*d*) dá uma caracterização geométrica dos operadores ortogonais. Estes são, entre os operadores lineares, os que estão associados a movimentos rígidos. Por exemplo, se nos restringirmos às transformações lineares do plano no plano, estes operadores serão as rotações de um ângulo θ e as reflexões em relação a uma reta pela origem, ou composições delas.

9.4 EXERCÍCIOS

1. Seja $\alpha = \{w_1, w_2, w_3\}$ uma base de V, um espaço vetorial real com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

$$[u]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Se $\langle u, v\rangle = 2$, a base α é ortonormal?

2. Ache valores para x e y tais que $\begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ seja uma matriz ortogonal.

3. Sejam $\alpha = \{(1, 1), (2, 0)\}$ e $\beta = \{(-1, 0), (2, 1)\}$. A partir das bases α e β construa bases ortonormais, usando o método de Gram-Schmidt. Se estas novas bases forem α' e β' respectivamente, mostre que a matriz de mudança de base $[I]_{\beta'}^{\alpha'}$ é ortogonal.

4. Dada uma matriz **A** cujas colunas são vetores ortonormais, prove que **A** é ortogonal.

5. Seja $T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$ de $\mathbf{R}^3$ em $\mathbf{R}^3$ com produto interno canônico.
   a) Mostre que T é um operador auto-adjunto mas não ortogonal.
   b) Se $v = (2, -1, 5)$ e $w = (3, 0, 1)$, verifique que $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$.
   c) Exiba uma base de autovetores de T e verifique que é uma base ortogonal. A partir desta base, escreva uma base ortonormal.

6. Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$
   a) Mostre que os autovalores são: a, $b + c$ e $b - c$.
   b) Ache uma base de autovetores.

7. Seja o operador linear $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exiba uma base ortonormal de autovetores.

8. Mostre que uma transformação ortogonal do plano no plano deixa invariante a distância entre dois pontos, isto é, dados u e v vetores quaisquer do plano,

$$\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$$

(Sugestão: use o teorema 9.3.3 (*d*).)

9. *a*) Mostre que se T é uma transformação ortogonal do plano no plano, sua matriz em relação à base canônica só pode ser da forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ou da forma

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

(Sugestão: 9.3.3 (*d*).)

b) Observe que se a matriz de T for da forma dada por **A**, T será uma rotação de um ângulo α (veja 5.2.4.). Mostre que $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$ onde $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. (**J** é a matriz em relação à base canônica de reflexão no eixo-x. Veja 5.2.2. Conclua finalmente, usando composição de funções, que se a transformação T for dada por **B**, T será uma reflexão através de uma reta do plano que passa pela origem.

10. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n, com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e $T: V \to V$ um operador linear auto-adjunto. Se α for uma base ortonormal de V, chamemos de **A** a matriz $[T]_\alpha^\alpha$. Consideremos a transformação linear $T_\mathbf{A}: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ dada por

$$T_\mathbf{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

onde $x_i \in \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ = conjunto dos números complexos) e o produto interno canônico em $\mathbf{C}^n$, dado por

$$\langle v, w\rangle_\mathbf{C} = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n$$

Biblioteca de Ciência & Tecno

para $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ (Veja 8.6.)

a) Mostre que T_A tem sempre autovalores. (Sugestão: Lembre-se de que um polinômio sempre tem raízes se estivermos trabalhando sobre os números complexos.)

b) Mostre que $\langle T_A v, w\rangle_c = \langle v, T_A w\rangle_c$ para quaisquer $v, w \in \mathbb{C}^n$. (Sugestão: Siga a idéia do teorema 9.2.3.)

c) Mostre que os autovalores de T_A são necessariamente reais. (Sugestão: Chame de λ um autovalor de T_A com autovetor v. Lembre que para um número complexo λ ser real, basta que ele seja igual ao seu conjugado. Desenvolva então $\langle T_A v, v\rangle_c$ de dois modos distintos, utilizando o item (*b*) e as propriedades de produto interno sobre um espaço vetorial complexo. Veja 8.6.)

d) Mostre que os autovalores de T e T_A são os mesmos.

e) Utilizando os resultados anteriores, conclua que um operador linear auto-adjunto tem autovalores e eles são necessariamente reais.

11. Seja V um espaço vetorial real de dimensão n, $T: V \to V$ um operador linear auto-adjunto e $v \in V$ um autovetor de T.

a) Mostre que $[v]$, o espaço gerado por v, é invariante por aplicação do operador T, isto é, se $w \in [v]$, então $Tw \in [v]$.

b) Mostre que $[v]^\perp$, o complemento ortogonal de $[v]$ (veja 8.5), é invariante por aplicação do operador T, isto é, se $w \in [v]^\perp$, então $Tw \in [v]^\perp$ e portanto T induz um operador linear $T_1 : [v]^\perp \to [v]^\perp$, $w \to Tw$

c) Mostre que o operador T_1 definido no item (*b*) é auto-adjunto.

d) Mostre que todo autovetor w de T_1 com autovalor δ também é autovetor de T com o mesmo autovalor δ.

12. Demonstre o teorema 9.3.1, isto é, se $T: V \to V$ um operador linear auto-adjunto, então existe uma base ortonormal de autovetores de T. (Sugestão: Faça por indução finita sobre a dimensão de V, utilizando os Exercícios 10 e 11.)

13. *a*) Dê a transformação linear que descreve o movimento rígido que leva o segmento de extremos (-6, 2) e (-1, 2) no segmento de extremos (-2, 6) e (1, 2) respectivamente.

b) Mostre que esta transformação é uma rotação e encontre seu ângulo.

14. *a*) Use a definição 9.2.1 e o teorema 9.3.1 para mostrar que um operador é auto-adjunto se e somente se existir uma base β de vetores ortonormais em relação à qual $[T]_\beta^\beta$ é diagonal.

b) Use agora o resultado acima para dar uma caracterização geométrica das transformações auto-adjuntas do plano no plano. (Observe que $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ e note o efeito geométrico de cada uma destas duas últimas matrizes.

c) Analise separadamente em *b*) os casos

i) $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

ii) $a = 0$ e $b \neq 0$.

iii) $a = 0$ e $b = 0$.

d) Seja α a base canônica e $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

i) Diagonalize o operador T. (Escolha uma base ortonormal.)

ii) Interprete geometricamente T usando *b*).

iii) Teste sua interpretação geométrica, verificando qual é a imagem por T de um quadrado de vértices (0, 0), (1, 1), (0, 2) e (-1, 1).

9.4.1 Respostas

1. Não, pois $\langle u, v\rangle \neq 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 3(-3)$.
$= -1$

3. $\alpha' = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$ $\qquad \beta' = \{(-1, 0), (0, 1)\}$

$$[I]_{\beta'}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad [I]_{\beta'}^{\alpha'} \cdot ([I]_{\beta'}^{\alpha'})' = I$$

5. $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ é simétrica. Logo T é auto-adjunto. Como as colunas de $[T]$ não são vetores ortonormais, T não é ortogonal.

7. $\lambda_1 = -9, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3$

$v_1 = (1, -2, -1), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, -1)$

$$\beta = \{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})\}$$

9. *a*) Sejam $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $v = (x, y)$ qualquer T ortogonal $\Rightarrow \|T_{(v)}\|$

$= \|v\|$ etc., escolhendo vários vetores v para gerar um sistema de equações que fornece a, b, c e d.

b) Sugestão: a inclinação da reta pela origem tem inclinação de $\frac{\alpha}{z}$. Ache a imagem do ponto (x, y), onde $v = (x, y)$, e mostre que esta imagem é exatamente $B \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, ou seja, T_v.

11. *a*) $w \in [v] \Longrightarrow \exists u \in R$ tal que $w = uv$.
$Tw = T(uv) = uTv = u \cdot \lambda v$ onde λ é o autovalor associado a v. Mas $(u\lambda)v \in [v]$, e portanto $Tw \in [v]$.

b) Seja $w \in [v]^{\perp}$. Então $< w, v > = 0$.
Como $< Tw, v > = < w, Tv >$ pois T é auto-adjunto, e
$Tv = \lambda v$, $< Tw, v > = < w, \lambda v > = \lambda < w, v > = 0$
Portanto, $Tw \in [v]^{\perp}$.

c) Seja $\beta = \{\frac{v}{\|v\|}, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V.
Então $\beta_1 = \{v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $[v]^{\perp}$.
$[T]_{\beta}$ é simétrica pois T é auto-adjunto e da forma $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Então $[T_1]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ é simétrica e T_1 é auto-adjunto.

d) $Tw = T_1 w$, pois $w \in [v]^{\perp}$, e $T_1 w = \delta w$.
Então δ é autovalor de T e w um autovetor associado.

13. Seja $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Então $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{6} \end{bmatrix}$ e

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Logo, $[T] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

onde $\alpha = -\arccos\frac{3}{5}$.

Leituras Sugeridas e Refências

1 Gelfand, I. M.; *Lectures in Linear Algebra*; Interscience Publishers, New York, 1961.
2 Halmos, P.; *Finite Dimensional Vector Spaces*; Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1958.
3 Hoffman, K. e Kunze, R.; *Álgebra Linear*; Editora Polígono, São Paulo, 1971.

10

FORMAS LINEARES, BILINEARES E QUADRÁTICAS

10.1 FORMAS LINEARES

Suponha que uma pessoa necessite comprar ferro, chumbo e cobre a cinco, seis e quatro cruzeiros o quilo, respectivamente. Se esta pessoa compra x quilos de ferro, y quilos de chumbo e z quilos de cobre, podemos representar esta compra pelo vetor (x, y, z) e o custo total é dado pela expressão $5x + 6y + 4z$. Observe que a "função custo"

$$c : R^3 \longrightarrow R$$
$$(x, y, z) \longmapsto 5x + 6y + 4z$$

é uma transformação linear (verifique) cujo contra-domínio é um espaço vetorial muito particular, pois é o conjunto dos números reais. Transformações lineares deste tipo aparecem muito e por isso recebem um nome especial.

10.1.1 Definição: Seja V um espaço vetorial real. Uma *forma linear* é uma transformação linear $f : V \longrightarrow R$.

10.1.2 Exemplos

Exemplo 1: $f: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$

$$(x, y) \longmapsto x + y \text{ ou na forma matricial}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: $g: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$

$$(x, y, z) \longmapsto 2x + y - z \text{ ou na forma matricial}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto [2 \ 1 \ -1] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Se $f: V \longrightarrow \mathbf{R}$ é uma forma linear, $\alpha = \{\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_n\}$ é base de V e $\beta = \{\mathbf{w}\}$ é base de $\mathbf{R}$, então

$$[f]_\beta^\alpha = [a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n]_{1 \times n}.$$

Se $\mathbf{v} \in V$ é tal que

$$[\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

então $[f(\mathbf{v})]_\beta = [f]_\beta^\alpha [\mathbf{v}]_\alpha$.

10.2 FORMAS BILINEARES

Consideremos agora funções, associadas a espaços vetoriais, que se comportam mais ou menos como produtos internos, isto é, funções que a cada par de vetores associam um número de tal forma que uma vez fixado o primeiro vetor, a função seja uma forma linear em relação ao segundo vetor, e vice-versa. Funções deste tipo estão muito relacionadas com considerações acerca da energia de um corpo (veja 10.5) e, portanto, com toda a Física. Nesta secção definiremos estas funções, que serão denominadas formas bilineares, e estudaremos alguns aspectos técnicos, principalmente o seu relacionamento com matrizes, que é o mais importante na prática.

10.2.1 Definição: Seja V um espaço vetorial real. Uma *forma bilinear* é uma aplicação $B: V \times V \to \mathbf{R}$ definida por $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \longmapsto B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ tal que:

i) Para todo w fixado, $B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ é uma forma linear em v, isto é,

$$B(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$$
$$\text{e} \qquad B(a\mathbf{v}, \mathbf{w}) = aB(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

ii) Para todo v fixado, $B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ é uma forma linear em w, isto é,

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$$
$$\text{e} \qquad B(\mathbf{v}, a\mathbf{w}) = aB(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

10.2.2 Exemplos

Exemplo 1: O produto usual de números reais

$$p: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$(x, y) \longmapsto p(x, y) = xy$$

Verificando *i*) e *ii*):

$$p(x, y + z) = x(y + z) = xy + xz = p(x, y) + p(x, z)$$
$$p(ax, y) = ax \cdot y = a(xy) = ap(x, y)$$

Analogamente mostram-se as outras propriedades.

Exemplo 2: $B: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dada por

$$B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2y_1y_2$$

é bilinear. De fato,

$$B((x_1, y_1), (x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = B((x_1, y_1), (x_2 + x_3, y_2 + y_3)) =$$
$$= x_1(x_2 + x_3) + 2y_1(y_2 + y_3) = (x_1x_2 + 2y_1y_2) + x_1x_3 + 2y_1y_3 =$$
$$= B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + B((x_1, y_1), (x_3, y_3))$$

As outras propriedades são verificadas de modo análogo.

Exemplo 3: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Podemos definir a forma bilinear $V \times V \to \mathbf{R}$ por $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. O fato de B ser bilinear é uma conseqüência das propriedades de produto interno.

Vamos considerar agora um exemplo importante.

Exemplo 4:

$$\text{Seja } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Podemos associar a M uma forma bilinear $B:\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definida por

$$B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= -2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3$$

A bilinearidade de B decorre das propriedades do produto e da soma de matrizes.

Exemplo 5: Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e α uma base de V. De modo análogo ao que foi feito no exemplo anterior, dada uma matriz qualquer $\mathbf{M}_{n\times n}$, podemos associar uma forma bilinear $B:V \times V \to \mathbf{R}$ definida por:

se

$$[\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{w}]_\alpha = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Se $B:V \times V \to \mathbf{R}$ é uma forma bilinear e dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ em V, em geral temos

$$B(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \neq B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2)$$

pois
$$B(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) =$$
$$= B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2)$$

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = [\mathbf{v}]'_\alpha\, \mathbf{M}\, [\mathbf{w}]_\alpha$$

Observe, ainda, que no Exemplo 4, temos $V = \mathbf{R}^3$ e a base canônica. A seguir veremos que, na verdade, toda forma bilinear pode ser escrita na forma do Exemplo 5, dado acima.

10.3 MATRIZ DE UMA FORMA BILINEAR

Sejam V um espaço vetorial e $B:V \times V \to \mathbf{R}$ uma forma bilinear. Dada uma base $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de V, associamos a B uma matriz $[B]^\alpha_\alpha$ chamada *matriz da forma bilinear B, na base* α, do seguinte modo:

Se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$ e $\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_n\mathbf{v}_n$,

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n, y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_n\mathbf{v}_n) = \sum_{i,j}^{n} x_i y_j B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$$

$$= [x_1\ \ldots\ x_n] \begin{bmatrix} B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & \ldots & B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1) & \ldots & B(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{v}]'_\alpha\, [B]^\alpha_\alpha\, [\mathbf{w}]_\alpha$$

10.3.1 Exemplos

Exemplo 1: Seja $B:\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ a forma bilinear dada por $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -x_1y_1 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ onde $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{w} = (y_1, y_2)$. Então se $\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é a base canônica de $\mathbf{R}^2$, temos

$$[B]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Com isto, podemos escrever a forma bilinear dada na forma matricial:

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ou seja,
$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = [\mathbf{v}]'_\alpha\, [B]^\alpha_\alpha\, [\mathbf{w}]_\alpha$$

Exemplo 2: Seja $B:\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ a forma bilinear definida por $B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = -2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3$. Procuremos $[B]^\alpha_\alpha$, onde $\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, é base canônica de $\mathbf{R}^3$:

$$[B]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ B(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{bmatrix}$$

Nesta matriz determinamos, por exemplo, $B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = B((0, 1\ 0), (1, 0, 0)) = -2 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 4$. Calculando os outros elementos, obtemos

$$[B]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Compare com o Exemplo 4 de 10.2.2. Como não poderia deixar de ser, $[B]^\alpha_\alpha = \mathbf{M}$.

10.4 FORMA BILINEAR SIMÉTRICA

10.4.1 Definição: A forma bilinear $B: V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ é *simétrica* se $B(v, w) = B(w, v)$ para todo $v, w \in V$.

10.4.2 Exemplos

Exemplo 1: Seja $\langle , \rangle$ um produto interno em V. Então a forma bilinear $B(v, w) = \langle v, w \rangle$ é simétrica, pois $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.

Exemplo 2: $B: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dada por

$$B(v, w) = -x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_2$$

onde $v = (x_1, x_2)$ e $w = (y_1, y_2)$.

Calculando, $B(w, v)$, temos

$$B(w, v) = ((y_1, y_2), (x_1, x_2))$$
$$= -y_1x_1 + 3y_2x_1 + 3y_2x_1 + 2y_2x_2$$

Como $B(v, w) = B(w, v)$, B é simétrica.

Observe que $[B]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica. De fato:

$$B(v, w) = [x_1 \; x_2] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Este resultado vale em geral, podendo ser enunciado no teorema abaixo.

10.4.3 Teorema: Uma forma bilinear $B: V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ é simétrica se e somente se $[B]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica.

Prova: (Veja o Exercício 7 de 10.7.)

10.5 FORMAS QUADRÁTICAS

Consideremos uma partícula de massa m deslocando-se no espaço com velocidade $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. A energia cinética que esse corpo possui é dada pela expressão

$$E_c = \frac{m\|v\|^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right)^2$$

Portanto,

$$E_c = \frac{m}{2} \cdot v_x^2 + \frac{m}{2} \cdot v_y^2 + \frac{m}{2} \cdot v_z^2 =$$

$$= [v_x \; v_y \; v_z] \begin{bmatrix} m/2 & 0 & 0 \\ 0 & m/2 & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Dessa forma, a energia cinética pode ser interpretada como uma função (que não é linear) da velocidade.

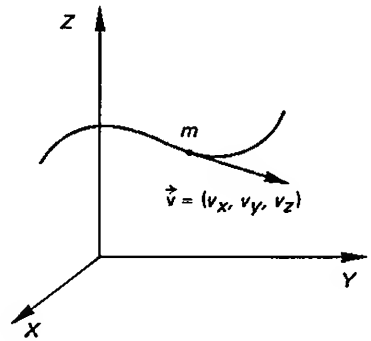


Figura 10.5.1

$$E_c: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

$$(v_x, v_y, v_z) \longmapsto \frac{m}{2} \cdot v_x^2 + \frac{m}{2} \cdot v_y^2 + \frac{m}{2} \cdot v_z^2$$

Se considerarmos, agora, a aplicação bilinear simétrica

$$B: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

cuja expressão é

$$B((v_x, v_y, v_z), (w_x, w_y, w_z)) = [v_x \; v_y \; v_z] \begin{bmatrix} m/2 & 0 & 0 \\ 0 & m/2 & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix},$$

observamos que

$$E_c(v_x, v_y, v_z) = B((v_x, v_y, v_z), (v_x, v_y, v_z)).$$

Expressões que se comportam como a da energia cinética, isto é, que provêm de formas bilineares simétricas, recebem o nome de *formas quadráticas*. Agora, poderemos formalizar este conceito.

10.5.1 Definição: Seja V um espaço vetorial real e $B: V \times V \to \mathbf{R}$ uma forma bilinear simétrica. A função $Q: V \to \mathbf{R}$ definida por $Q(v) = B(v, v)$ é chamada *forma quadrática* associada a B.

Biblioteca de Ciência & Tecnologia UFRJ

Observe que (de 10.4.2) em relação a uma base α de V, Q pode ser expressa na seguinte forma:

$$Q(\mathrm{v}) = [\mathrm{v}]'_\alpha \, [B]^\alpha_\alpha \, [\mathrm{v}]_\alpha$$

onde $[B]^\alpha_\alpha$ é uma matriz simétrica.

10.5.2 Exemplos

Exemplo 1:

$Q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$
$Q(\mathrm{v}) = x^2 - 10xy + y^2$, onde $\mathrm{v} = (x, y)$

Sabemos que

$$Q(\mathrm{v}) = [x \; y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Então, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = x^2 - 10xy + y^2$.
Logo, $a = 1$, $2b = -10$, $c = 1$
Substituindo,

$$Q(\mathrm{v}) = [x \; y] \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe ainda que Q é a forma quadrática associada à forma bilinear:

$$B(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = [x_1 \; y_1] \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

onde $[\mathrm{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $[\mathrm{w}]_\alpha = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ e $[B]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

(α é a base canônica de $\mathbf{R}^2$.)

O procedimento adotado no exemplo anterior pode ser aplicado a uma forma quadrática genérica $Q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, onde $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$. Concluímos então que sua forma matricial é

$$Q(x, y) = [x \; y] \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

$Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$
$Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 4y^2 + 5yz.$

Em relação à base canônica de $\mathbf{R}^3$, Q é dada na seguinte forma matricial:

$$Q(x, y, z) = [x \; y \; z] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Compare com o exemplo anterior e extraia um resultado análogo para formas quadráticas $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$Q(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz.$$

Exemplo 3:

$Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$
$Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2$

$$= [x \; y \; z] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

10.6 DIAGONALIZAÇÃO DA FORMA QUADRÁTICA

Veremos a seguir que qualquer que seja a forma quadrática $Q : V \to \mathbf{R}$ sempre existe uma base ortonormal de V em relação a qual a matriz de Q é diagonal, ou seja, Q terá uma forma parecida com a do Exemplo 3 de 10.5.2. Antes de formalizar este resultado no teorema 10.6.1, vamos "diagonalizar" a forma quadrática do Exemplo 1 de 10.5.2. $Q(\mathrm{v}) = x^2 - 10xy + y^2$ onde $\mathrm{v} = (x, y)$. Procuremos uma base β de modo que se

$$[\mathrm{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$Q(\mathrm{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$$

ou ainda

$$Q(\mathrm{v}) = [x_1 \; y_1] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Temos

$$Q(x, y) = [x\ y] \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou $Q(x, y) = [\mathrm{v}]'_\alpha\ [B]^\alpha_\alpha\ [\mathrm{v}]_\alpha$, α base canônica do $\mathbf{R}^2$. Como a matriz $[B]^\alpha_\alpha$ é simétrica, ela é diagonalizável, admitindo um conjunto de autovetores ortonormais.

Os autovalores de $[B]^\alpha_\alpha$ são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -4$. Procurando os autovetores, encontramos para $\lambda_1 = 6$, $\mathrm{v}_1 = (x, -x)$ e para $\lambda_2 = -4$, $\mathrm{v}_2 = (x, x)$. (Verifique.) Assim, uma base ortonormal β de autovetores será dada por

$$\mathrm{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad \mathrm{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Seja $[I]^\beta_\alpha$ a matriz de mudança de base. Então

$$[B]^\alpha_\alpha = [I]^\beta_\alpha\ [B]^\beta_\beta\ [I]^\alpha_\beta, \text{ onde } [B]^\beta_\beta = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Substituindo em $Q(\mathrm{v}) = [\mathrm{v}]'_\alpha\ [B]^\alpha_\alpha\ [\mathrm{v}]_\alpha$, temos

$$Q(\mathrm{v}) = [\mathrm{v}]'_\alpha\ [I]^\beta_\alpha\ [B]^\beta_\beta\ [I]^\alpha_\beta\ [\mathrm{v}]_\alpha$$

Como $[I]^\beta_\alpha$ é ortogonal, pois α e β são bases ortonormais, (veja 9.1.5),

$$([I]^\beta_\alpha)^{-1} = [I]^\alpha_\beta = ([I]^\beta_\alpha)'$$

donde

$$\begin{aligned} Q(\mathrm{v}) &= ([I]^\alpha_\beta\ [\mathrm{v}]_\alpha)'[B]^\beta_\beta\ ([I]^\alpha_\beta\ [\mathrm{v}]_\alpha) \\ &= [\mathrm{v}]'_\beta\ [B]^\beta_\beta\ [\mathrm{v}]\beta. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} Q(\mathrm{v}) &= [x_1\ y_1] \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ &= 6x_1^2 - 4y_1^2 \end{aligned}$$

onde

$$[\mathrm{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

10.6.1 Teorema: Seja $Q(\mathrm{v}) = B(\mathrm{v}, \mathrm{v})$ uma forma quadrática em V. Existe uma base ortonormal β de V tal que se

$$[\mathrm{v}]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

então $Q(\mathrm{v}) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$.

Prova: Seja α uma base ortonormal qualquer de V.

Então $Q(\mathrm{v}) = B(\mathrm{v}, \mathrm{v}) = [\mathrm{v}]'_\alpha\ [B]^\alpha_\alpha\ [\mathrm{v}]_\alpha$. Logo, a matriz $[B]^\alpha_\alpha$ é uma matriz simétrica e, portanto, corresponde a um operador auto-adjunto $T: V \to V$ que tem como matriz $[T]^\alpha_\alpha = [B]^\alpha_\alpha$. Como um operador auto-adjunto pode ser diagonalizado mediante uma base β de autovetores ortonormais, então

$$[B]^\alpha_\alpha = [T]^\alpha_\alpha = [I]^\beta_\alpha \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]^\alpha_\beta$$

$$= ([I]^\alpha_\beta)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]^\alpha_\beta$$

$$= ([I]^\alpha_\beta)' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]^\alpha_\beta$$

pois α e β são bases ortonormais e, portanto, $[I]^\alpha_\beta$ é uma matriz ortogonal.

Então,

$$Q(v) = [v]'_\alpha \cdot ([I]^\alpha_\beta)' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]^\alpha_\beta \cdot [v]_\alpha$$

$$= ([I]^\alpha_\beta [v]_\alpha)' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} ([I]^\alpha_\beta [v]_\alpha)$$

$$= [v]'_\beta \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [v]_\beta$$

$$= [y_1 \quad \dots \quad y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

10.6.2 Exemplos

Exemplo 1: Seja a forma quadrática em $\mathbf{R}^2$ dada por:

Se $v = (x_1, x_2)$,

$$Q(v) = -4x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_2^2$$
$$= -4x_1^2 - 3x_1x_2 - 3x_1x_2 + 6x_2^2$$
$$= [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Calculemos os autovalores.

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 33$$

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{34} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{34}$$

Então existe uma base β (que é aquela de autovetores da matriz) tal que se

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

então $$Q(v) = [y_1 \; y_2] \begin{bmatrix} 1-\sqrt{34} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$Q(v) = (1 - \sqrt{34})y_1^2 + (1 + \sqrt{34})y_2^2$$

Esta diagonalização das formas quadráticas (forma normal) tem muitas aplicações e uma delas será vista na classificação das cônicas, que apresentaremos no próximo capítulo.

10.7 EXERCÍCIOS

1. Seja f uma forma linear de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}$ tal que

$$f(x, y) = -x + 2y$$

Sejam $\alpha = \{(1, -1), (2, 0)\}$ e $\beta = \{-1\}$ bases de $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}$ respectivamente. Se $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, calcule $[f(v)]_\beta$.

2. Verifique se as aplicações abaixo são formas bilineares.

a) $B : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 + y_2$
b) $B : V \times V \to \mathbf{R}$ definida por $B(u, v) = \langle u, v \rangle$.

3. Em 2*b*) você deve ter mostrado que todo produto interno é uma forma bilinear. A recíproca é verdadeira?

4. Se $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, ache a forma bilinear $B : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ associada à matriz M. Esta forma bilinear é simétrica?

5. Qual é a matriz $M_{2\times 2}$ associada à forma bilinear de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ que dá o produto interno usual de $\mathbf{R}^2$?

6. *a*) Seja $A : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definida por $A((x, y, z), (x', y', z')) = xy' + xz' - yx' - zy' + zz'$. Ache a matriz de A em relação às bases *i*) canônica *ii*) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$.

b) Seja $A : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $A((x, y), (x', y')) = xy' - yx'$ e $\alpha = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. Ache $[A]^\alpha_\alpha$.

Biblioteca de
Ciência & Tecnol

7. Mostre o resultado afirmado em 10.4.2 e use este fato para dar exemplos de formas bilineares simétricas $B: \mathbf{R}^5 \times \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}$.

8. *a*) Seja $A((x, y), (x', y')) = 3xx' - yy'$. Ache a forma quadrática $Q: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ associada a A.
   b) Seja $Q(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2$. Ache a matriz da forma bilinear associada.

9. Seja $Q(x, y) = x^2 + 12xy - 4y^2$. Determine uma base β tal que

$$[\mathrm{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ e } Q(\mathrm{v}) = ax_1^2 + by_1^2$$

10. Se A é uma forma bilinear simétrica e Q a forma quadrática associada a ela, mostre que

$$A(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = \frac{1}{4} Q(\mathrm{v} + \mathrm{w}) - \frac{1}{4} Q(\mathrm{v} - \mathrm{w})$$

11. Uma forma quadrática Q é chamada *positiva definida*, se para todo $\mathrm{v} \neq 0$, $Q(\mathrm{v}) > 0$.
   a) Como devem ser os autovalores da matriz de uma forma quadrática positiva definida? (Pense na matriz diagonalizada.)
   b) A forma quadrática $Q: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ dada pela matriz (em relação à base canônica)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

   é *positiva definida*?

12. Mostre que se $B(\mathrm{v}, \mathrm{w})$ é uma forma bilinear simétrica cuja forma quadrática associada é positiva definida, então $B(\mathrm{v}, \mathrm{w})$ é um produto interno. Compare com o Exercício 3.

13. Considere o conjunto V^*, formado por todas as formas lineares $T: V \rightarrow \mathbf{R}$, onde V é um espaço vetorial de dimensão n, e V^* é chamado de *espaço dual* de V.
   a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.
   b) Mostre que, dada uma base $v_1, \ldots, v_n$ de V, as formas $T_i: V \rightarrow \mathbf{R}$ definidas por $T_i(v_j) = 0$, se $i \neq j$ e $T_i(v_j) = 1$, se $i = j$, formam uma base de V^*.
   c) Conclua finalmente que V e V^* são espaços vetoriais isomorfos.

10.7.1 Respostas

1. $[f(v)]_\beta = [1]$

3. Não, pois $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ e o produto interno é comutativo, ou seja, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Seja $[B]_\alpha^\alpha$ simétrica. $[B]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n_1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ onde $a_{ij} = a_{ji}$

   Seja $u = [x_1, \ldots, x_n]$
   $v = [y_1, \ldots, y_n]$

   Então $B(u, v) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$

   e $B(v, u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i x_j$. Como a adição é comutativa e $a_{ji} = a_{ij}$, temos, depois de trocar os índices i e j,

$$B(v, u) = \sum_{j=1}^{jn} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = B(u, v)_\alpha$$

   Agora, seja B simétrica. Então $B(u, v) = B(v, u)$

   Daí obtemos $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i}^{n} a_{ij} x_j y_i$

   Invocando índices à direita, temos

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i y_j$$

   Como isto é válido para todos os vetores u e v,
   $a_{ij} = a_{ji}$ e $[B]_\alpha^\alpha$ é simétrica.

Exemplo: Seja

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$B(u, v) = x_1y_2 - x_1y_5 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - x_3y_3 - x_5y_1 + 3x_5y$

9. $\beta = \left\{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)\right\}$. Então $[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $Q(v) = -8x_1^2 + 5y_1^2$

11. *a*) Os autovalores são todos não negativos.

b) Não, pois os autovalores são $\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$

Leituras Sugeridas e Referências

[1] Halmos, P.; *Finite Dimensional Vector Spaces*; Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1958.

[2] Hoffman, K. e Kunze, R.; Álgebra Linear; Editora Polígono, São Paulo, 1971.

11

CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS E QUÁDRICAS

11.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo estaremos interessados em figuras do plano $\mathbf{R}^2$ ou do espaço $\mathbf{R}^3$, isto é, em conjuntos de pontos no plano ou no espaço, cujas coordenadas satisfazem certas propriedades. Por exemplo, o subconjunto

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y = 1\}$$

pode ser representado graficamente, como mostra a Figura 11.1.1.

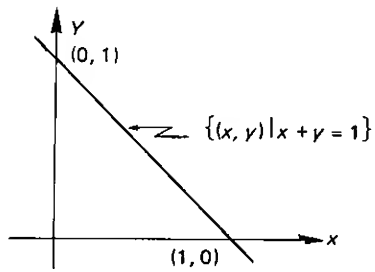


Figura 11.1.1

Outro exemplo é $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 2 \text{ e } y = 1\}$ cuja representação gráfica é

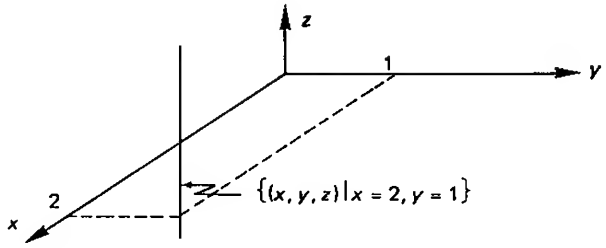


Figura 11.1.2

Estaremos particularmente interessados em estudar subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ da forma

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : F_1(x, y) = 0, \ldots, F_k(x, y) = 0\}$$

e subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ da forma

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : F_1(x, y, z) = 0, \ldots, F_k(x, y, z) = 0\}$$

As equações $F_1(x, y) = 0, \ldots, F_k(x, y) = 0$ (ou $F_1(x, y, z) = 0, \ldots, F_k(x, y, z) = 0$ no caso do espaço $\mathbf{R}^3$) são chamadas *equações cartesianas* da figura que o conjunto determina. Observe que estas equações relacionam as coordenadas canônicas, isto é, coordenadas em relação à base canônica de $\mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$). Freqüentemente, dá-se apenas as equações cartesianas da figura.

11.1.1 Exemplos

Exemplo 1: Podemos desenhar a figura no plano cuja equação cartesiana (em relação à base canônica) é $y - x^2 = 0$.

A figura pedida é o subconjunto $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y - x^2 = 0\}$, constituído pelos pontos do plano, da forma (x, x^2). Portanto,

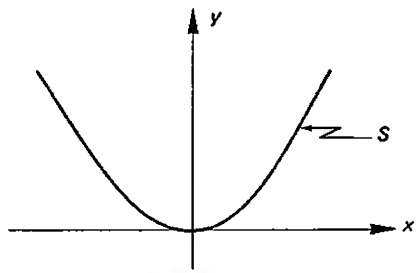


Figura 11.1.3

Exemplo 2: Para desenhar a figura no espaço cuja equação cartesiana é $y - x^2 = 0$, devemos saber que a figura pedida é o subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y = x^2\}$. Note que z pode assumir qualquer valor.

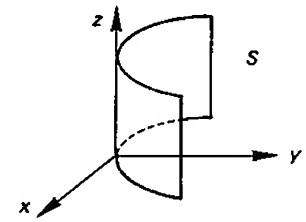


Figura 11.1.4

Observe ainda que as equações cartesianas dos dois exemplos anteriores são aparentemente as mesmas.

Analisemos agora o que acontece quando as equações cartesianas são de tipos especiais. Comecemos com o tipo mais simples, ou seja, as equações $F(x, y) = 0$ (ou $F(x, y, z) = 0$), de primeiro grau.

11.2 RETAS NO PLANO

11.2.1 Definição: Uma *reta no plano* é o conjunto dos pontos (x, y) do plano cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação cartesiana

$$Ax + By = C$$

onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Temos as seguintes possibilidades:

i) $A \neq 0$ e $B \neq 0$; $Ax + By = C$

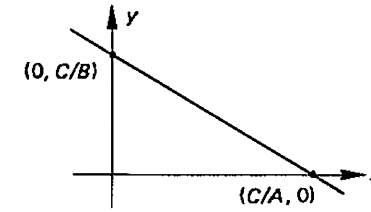


Figura 11.2.1

ii) $A = 0$ e $B \neq 0$; $By = C$

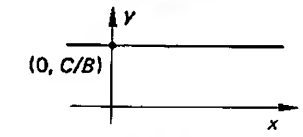


Figura 11.2.2

iii) $A \neq 0$ e $B = 0$
$Ax = C$

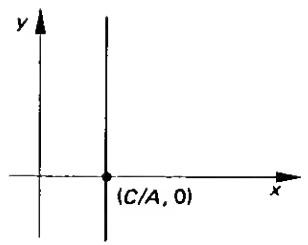


Figura 11.2.3

11.3 PLANOS NO ESPAÇO

11.3.1 Definição: Um *plano no espaço* é o conjunto dos pontos (x, y, z) do espaço cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem à equação

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$.

É claro que esta definição algébrica deve coincidir com a definição geométrica de plano. Consideremos um ponto qualquer (x_0, y_0, z_0) tal que $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ (sempre exista). Então a equação $Ax + By + Cz + D = 0$ pode ser escrita, subtraindo-se a primeira da segunda,

$$0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$
$$= \langle (A, B, C), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle$$

onde $\langle , \rangle$ representa o produto interno canônico em $\mathbf{R}^3$. Os pontos (x, y, z) que satisfazem a equação são (x, y, z), de tal modo que o vetor diferença $v = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ seja ortogonal ao vetor (A, B, C). (Veja a Figura 11.3.1.) Isto corresponde à definição geométrica de um plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e tem (A, B, C) como vetor normal.

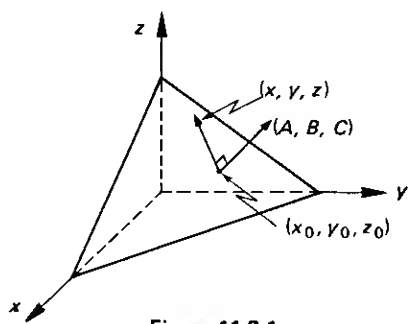


Figura 11.3.1

Passemos agora a analisar o que acontece quando a equação cartesiana é de segundo grau.

11.4 CÔNICAS NO PLANO

Para tratar das cônicas no plano de forma adequada procederemos estudando figuras padrão e, através da diagonalização de formas quadráticas associadas, mostraremos que as equações representam uma das figuras padrão centrada, possivelmente, em outro referencial.

11.4.1 Definição: Uma *cônica* em $\mathbf{R}^2$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

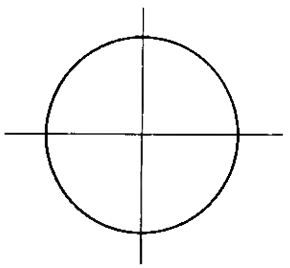
onde A ou B ou $C \neq 0$.

Observe que a equação da cônica envolve uma forma quadrática, $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, uma forma linear, $L(x, y) = Dx + Ey$, e um termo constante F. Isto é, a equação que define a cônica é:

$$\boxed{Q(x, y) + L(x, y) + F = 0.}$$

11.4.2 Exemplos

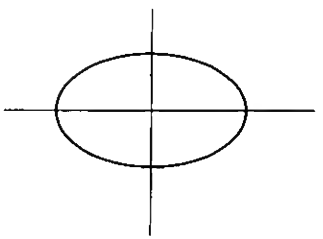
Circunferência



$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

$A = C = 1$
$B = D = E = 0$
$F = -r^2$

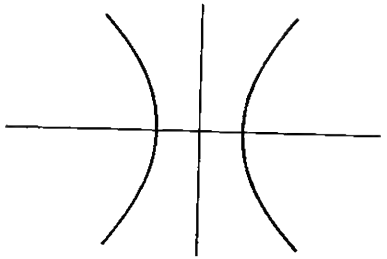
Elipse



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$A = \frac{1}{a^2}$, $C = \frac{1}{b^2}$; $a > 0, b > 0$
$B = D = E = 0$
$F = -1$

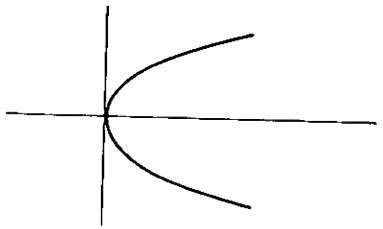
Hipérbole



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$A = \frac{1}{a^2}$, $C = -\frac{1}{b^2}$; $a > 0$, $b > 0$
$B = D = E = 0$
$F = -1$

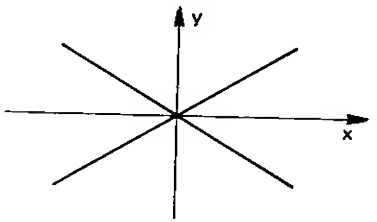
Parábola



$y^2 - Dx = 0$
$D \neq 0$

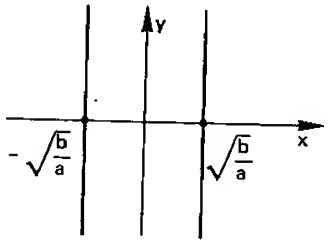
Temos ainda os casos chamados degenerados

Par de retas concorrentes (hipérbole degenerada)



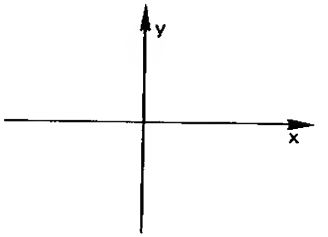
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Longrightarrow y = \pm\frac{b}{a}x$$
$a > 0$
$b > 0$

Par de retas paralelas (parábola degenerada)



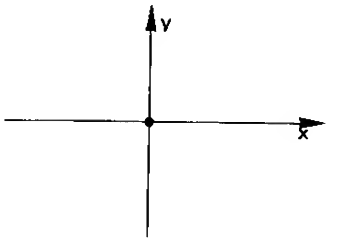
$ax^2 - b = 0$
$a > 0$
$b > 0$

Uma reta (parábola degenerada)



$x^2 = 0$

Um ponto (elipse degenerada)



$ax^2 + by^2 = 0$
$a > 0$
$b > 0$

Vazio (elipse ou parábola degenerada)

$ax^2 + by^2 + r^2 = 0$
$a > 0$
$b > 0$
$(r \neq 0)$

As equações das cônicas aqui apresentadas estão na "*forma reduzida*", isto é, $B = 0$; se $A \neq 0$, $D = 0$ e se $C \neq 0$, $E = 0$. Veremos a seguir, através de uma mudança de referencial conveniente, que toda cônica toma uma das formas colocadas acima.

Estamos interessados aqui nas cônicas, definidas algebricamente. No entanto, cada cônica pode ser perfeitamente caracterizada por propriedades geométricas (por exemplo, a elipse é o lugar dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é uma constante). O tratamento geométrico das cônicas que é a forma como elas foram introduzidas pelos gregos será dado em 11.7. O estudo das cônicas feito a partir de suas propriedades geométricas é muito bonito e tem muitas aplicações. Vale a pena ver!

Biblioteca de

11.4.3 Exemplos

Exemplo 1: $2x^2 - 5y^2 - 7 = 0$

$$2x^2 - 5y^2 = 7$$

$$\frac{2x^2}{7} - \frac{5y^2}{7} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{7}{2}} - \frac{y^2}{\frac{7}{5}} = 1$$

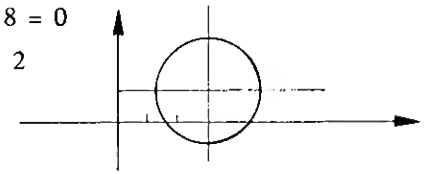
$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = 1, \text{ que é uma hipérbole}$$

Exemplo 2: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 2$$

onde $x_1 = x - 3$ e $y_1 = y - 1$



circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro (3, 1).

Consideremos agora um exemplo mais complicado.

Exemplo 3:

Dada a equação na base canônica α de $\mathbf{R}^2$:

$$2x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0$$

nosso objetivo, mais uma vez, será determinar que figura esta cônica representa no plano. Para isto, precisamos inicialmente eliminar os termos mistos, do tipo xy, através da diagonalização da forma quadrática.

1º Passo: Escrevendo a equação anterior na forma matricial, temos

$$[x\ y]\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + [4\sqrt{2} \quad 12\sqrt{2}]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} - 8 = 0$$

2º Passo: Vamos calcular os autovalores e os autovetores ortonormais da matriz $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$.

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix}2 - \lambda & 2\\ 2 & 2 - \lambda\end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 4 = -4\lambda + \lambda^2$$

Então os autovalores são 0 e 4.

Para $\lambda_1 = 0$, $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, e $\mathbf{v}_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Para $\lambda_2 = 4$, $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4x\\ 4y\end{bmatrix}$, donde $\mathbf{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Sabemos de 10.6.1 que nesta nova base de autovetores $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, a forma quadrática

$$Q(\mathbf{v}) = [x\ y]\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \text{ onde } [\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

se reduz a

$$Q(\mathbf{v}) = [x_1\ y_1]\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix} \text{ se } [\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$$

3º Passo: Agora precisamos determinar a relação que existe entre $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$ e substituir o resultado na parte linear da equação dada.

$$L(\mathbf{v}) = [4\sqrt{2} \quad 12\sqrt{2}]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

Mas, $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = [I]^{\substack{\textit{autovetores}\\ \textit{canônica}}}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$.

Logo $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$

4º Passo: A equação original se reduz a

$$[x_1\ y_1]\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix} + [4\sqrt{2} \quad 12\sqrt{2}]\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix} - 8 = 0$$

$$0x_1^2 + 4y_1^2 + 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) + 12\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) - 8 = 0$$

$$4y_1^2 - 4x_1 + 4y_1 + 12x_1 + 12y_1 - 8 = 0$$

$$4y_1^2 + 8x_1 + 16y_1 - 8 = 0$$

$$y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 - 2 = 0$$

Esta última equação representa a cônica em relação ao novo referencial formado pelas retas suporte de v_1 e v_2, como mostra a Figura 11.4.1.

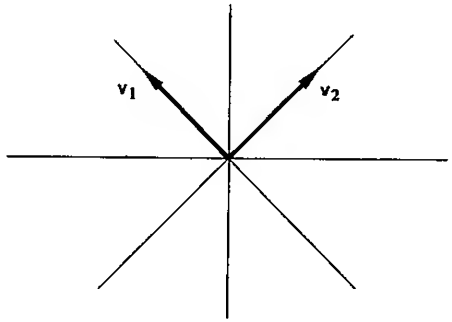


Figura 11.4.1

Vamos ainda introduzir uma nova mudança de coordenadas para identificar a cônica. Ela será dada por uma translação do referencial acima.

5º Passo: Para "eliminar" os termos lineares onde isto é possível ($\lambda \neq 0$), agrupamos os termos de $y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 - 2 = 0$ convenientemente.

$$(y_1^2 + 4y_1 + 4) - 4 + 2x_1 - 2 = 0$$
$$(y_1 + 2)^2 + 2(x_1 - 3) = 0$$

Tornando $x_2 = x_1 - 3$ e $y_2 = y_1 + 2$, obtemos $y_2^2 + 2x_2 - 6 = 0$ ou finalmente

$$x_2 = -\frac{1}{2}y_2^2$$

Assim, a equação acima representa a cônica em relação a um novo referencial R_3, obtido por translação e podemos finalmente identificá-la como sendo uma *parábola*, conforme indica a Figura 11.4.2. (Veja 11.4.2 *iv*.) A origem deste último referencial R_3 será $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$, isto é, $x_1 - 3 = 0$ e $y_1 + 2 = 0$.

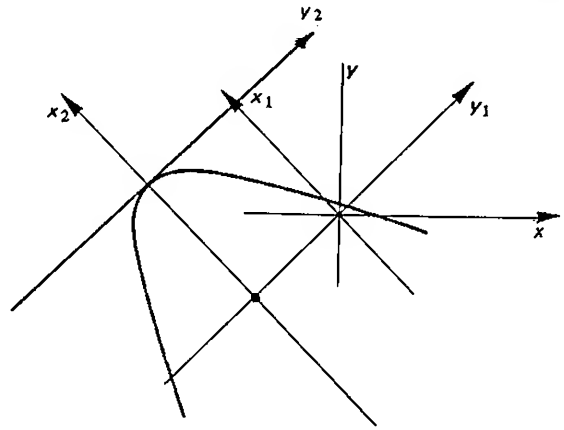


Figura 11.4.2

Agora iremos formular o procedimento geral de classificação das cônicas, estabelecendo em detalhes o que deve ser feito em cada passo.

11.4.4 Procedimento Geral de Classificação das Cônicas: Dada a equação (em coordenadas canônicas de $\mathbf{R}^2$)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ (A \text{ ou } B \text{ ou } C \neq 0),$$

para achar que figura ela representa no plano, devemos proceder do seguinte modo:

1º Passo: Escrevemos a equação na forma matricial:

$$[x\ y]\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [D\ E]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

2º Passo: Diagonalizamos a forma quadrática para eliminar os termos mistos. Para isto, precisamos encontrar os autovalores λ_1 e λ_2 e os autovetores ortonormais v_1 e v_2 de $\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$

3º Passo: Obtemos as novas coordenadas. Para isto, precisamos para substituir na equação de

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [I]\ \begin{matrix} \textit{autovetores} \\ \textit{canônica} \end{matrix}\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

4º Passo: Substituimos as novas coordenadas na equação, obtendo a equação na nova base $\{v_1, v_2\}$

$$[x_1\ y_1]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix} + [D\ E]\,[I]\ \overset{\text{autovetores}}{\underset{\text{canônica}}{}}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix} + F = 0$$

ou seja, $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a x_1 + b y_1 + F = 0$

5º Passo: Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos. Temos então três casos:

i) λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$.

$\lambda_1 x_1^2 + a x_1 + \lambda_2 y_1^2 + b y_1 + F = 0$

$\lambda_1(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1})^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + \lambda_2(y_1 + \frac{b}{2\lambda_2})^2 - \frac{b^2}{4\lambda_2} + F = 0$

Seja $x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y_2 = y_1 + \frac{b}{2\lambda_2}$, temos então $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0$

(que é uma das equações típicas) onde

$$f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2}$$

ii) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$.

$\lambda_1 x_1^2 + a x_1 + b y_1 + F = 0$

$\lambda_1(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1})^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + b y_1 + F = 0$

Tornando $x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y_2 = y_1$, temos

$$\lambda_1 x_2^2 + b y_2 + f = 0$$

(que é uma das equações típicas) onde

$$f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1}$$

iii) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. (similar ao anterior)

Como vimos, este procedimento permite-nos, através de uma mudança de referencial, colocar qualquer cônica na forma de uma das equações típicas (11.4.2). Neste processo classificamos a cônica, damos suas dimensões e posições no plano.

11.4.5 Muitas vezes, entretanto, estaremos interessados apenas em *classificar* a cônica dada por uma equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,

sem determinar suas dimensões e localização. Visando solucionar este problema de uma forma mais rápida, vamos discutir as possibilidades que temos em função dos sinais dos autovalores associados à forma quadrática.

Consideremos, portanto, os autovalores λ_1 e λ_2 de $\begin{bmatrix}A & \frac{B}{2}\\ \frac{B}{2} & C\end{bmatrix}$. Como já vimos, obteremos depois da eliminação do termo misto uma equação da forma

$$(*)\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a x_1 + b y_1 + F = 0$$

(I) Vamos analisar inicialmente, a situação em que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Neste caso, através de uma translação que é feita no 5º passo de 11.4.4, obtemos

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0$$

Note que se:

i) λ_1 e λ_2 forem ambos positivos, teremos para $f < 0$ uma elipse; para $f = 0$ teremos um ponto $(x_2 = y_2 = 0)$ e para $f > 0$ teremos o conjunto vazio (compare com 11.4.2).

ii) Se λ_1 e λ_2 forem ambos negativos, também teremos uma elipse, um ponto ou vazio, conforme f seja positivo, nulo ou negativo.

iii) Se λ_1 e λ_2 tiverem sinais opostos, poderemos ter uma hipérbole, quando $f \neq 0$, ou um par de retas concorrentes se $f = 0$.

(II) Consideremos agora a situação em que $\lambda_1 = 0$ (e, portanto $\lambda_2 \neq 0$). Como vimos, partindo da equação (*), chegamos a uma equação:

$$\lambda_2 y_2^2 + a x_2 + f = 0$$

Note que:

i) se $a \neq 0$ teremos uma parábola.

ii) se $a = 0$, poderemos ter um par de retas paralelas, uma reta ou o vazio. (Analise em função dos valores de f, em que situações isto ocorre).

(III) O caso em que $\lambda_2 = 0$ é discutido de maneira análoga ao (II).

Podemos resumir os resultados até aqui obtidos no seguinte teorema:

11.4.6 Teorema: Dada uma cônica definida pela equação (*) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores associados à sua forma quadrática; então:

i) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ esta equação representa uma elipse, ou suas degenerações (um ponto ou o vazio).

ii) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ esta equação representa uma hipérbole ou sua degeneração (par de retas concorrentes).

iii) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ esta equação representa uma parábola ou suas degenerações (par de retas paralelas, uma reta ou o vazio).

Podemos afirmar que o determinante associado à forma quadrática $\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ é igual ao produto de seus autovalores $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. (Veja o Exercício 7 de 7.5). Assim o sinal de $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ é o mesmo de $-(\frac{B^2}{4} - AC)$, que por sua vez tem o mesmo sinal de $-(B^2 - 4AC)$. Podemos assim reescrever o teorema anterior em função do "discriminante" $B^2 - 4AC$.

11.4.7 Teorema: Dada a equação: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, esta equação no plano representará:

i) uma elipse ou suas degenerações, se $B^2 - 4AC < 0$
ii) uma parábola ou suas degenerações, se $B^2 - 4AC = 0$
iii) uma hipérbole, se $B^2 - 4AC > 0$

11.5 QUÁDRICAS EM R^3

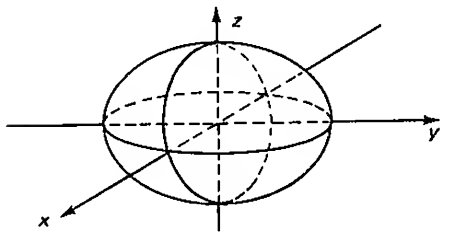
11.5.1 Definição: Uma *quádrica* em $\mathbf{R}^3$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

com A ou B ou C ou D ou E ou $F \neq 0$.

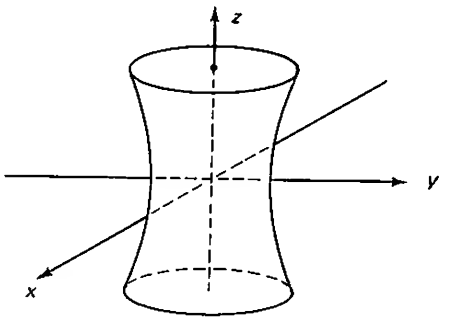
11.5.2 Exemplos

Elipsóide



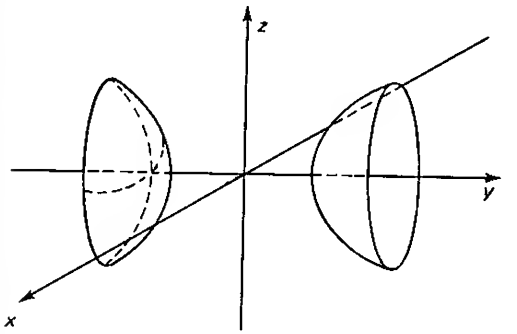
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperbolóide de uma folha



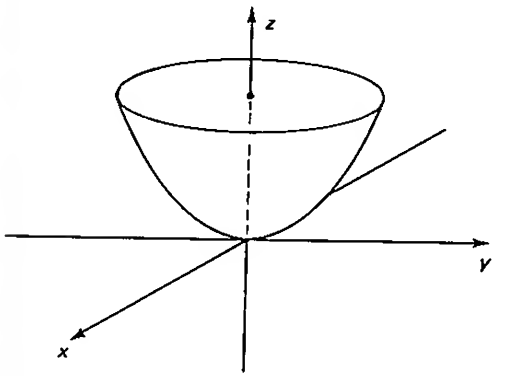
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperbolóide de duas folhas



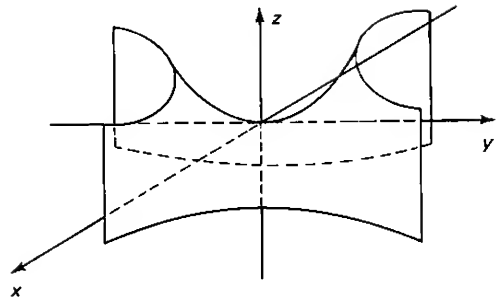
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Parabolóide elíptico



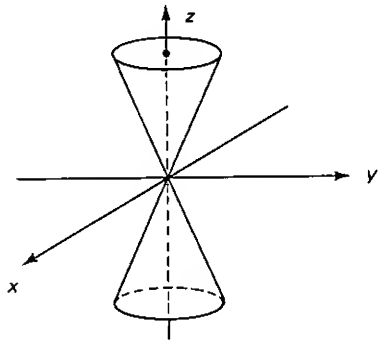
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Parabolóide hiperbólico



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

Cone quadrático

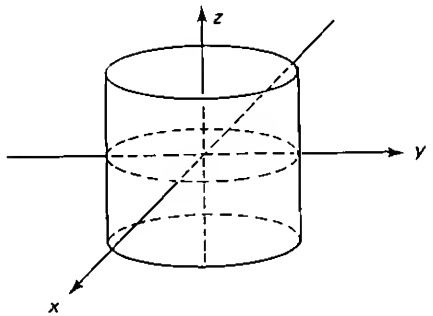


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

Cilindro

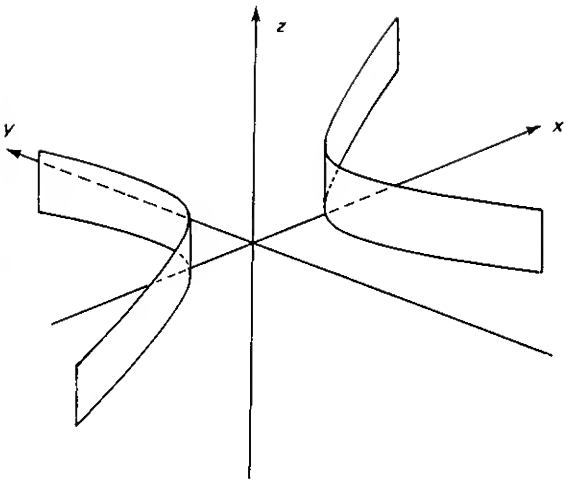
Se nenhum termo com z aparece na equação da quádrica, temos o cilindro. O cilindro "padrão" é formado por retas ortogonais ao plano $z = 0$ que passam por uma cônica neste plano. Por exemplo:

a) Cilindro elíptico



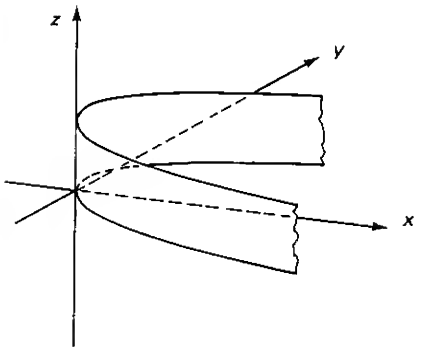
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

b) Cilindro hiperbólico



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

c) Cilindro parabólico



$$x = ky^2$$

A equação que define a quádrica pode representar o conjunto vazio ($x^2 = -1$), um ponto ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$), uma reta ($x^2 + y^2 = 0$), um plano ($z^2 = 0$), dois planos paralelos ($z^2 = 1$) ou dois planos que se interceptam ($xy = 0$). Estes casos são denominados *degenerados*. Da mesma forma que foi feito para cônica, mostramos através de uma mudança de referencial conveniente que toda quádrica é de um dos tipos descritos em 11.2.1. Ou seja, quando nos é dada uma equação do 2º grau em x, y, z, e precisamos saber que figura ela representa em $\mathbf{R}^3$ (classificar a quádrica) procedemos de modo análogo à situação em $\mathbf{R}^2$, reduzindo a equação e interpretando-a no final.

11.5.3 Exemplos

Exemplo 1: Para classificar a quádrica

$$-x^2 + 2yz + z - y = 100.$$

escrevemos a equação acima na forma matricial, obtendo:

$$[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0 \quad -1 \quad 1]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 100$$

Calculando os autovalores e os autovetores já normalizados da matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos:

para $\lambda_1 = -1$; $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e

para $\lambda_2 = 1$; $v_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Temos ainda

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{can.}} = [I]^{\substack{\textit{autovetores} \\ \textit{canônica}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\text{aut.}}$$

onde

$$[I]^{\substack{\textit{autovetores} \\ \textit{canônica}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Então, a equação da quádrica em relação a o referencial dado pelos autovetores será:

$$[x_1 \quad y_1 \quad z_1]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + [0 \quad -1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 100$$

Isto é,

$$-x_1^2 - y_1^2 + z_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 = 100.$$

Faremos agora uma nova mudança de coordenadas para eliminar os termos lineares onde isto é possível.

$$z_1^2 - x_1^2 - (y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2} - 100 = 0$$

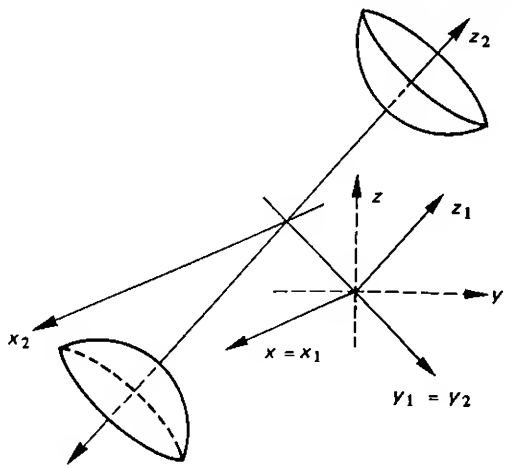
Seja $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $z_2 = z_1$; assim, temos a seguinte equação:

$$-\frac{x_2^2}{(\sqrt{\frac{199}{2}})^2} - \frac{y_2^2}{(\sqrt{\frac{199}{2}})^2} + \frac{z_2^2}{(\sqrt{\frac{199}{2}})^2} = 1$$

que representa a quádrica em relação ao referencial obtido por translação a partir daquele dos autovetores, cuja origem é dada por $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ e $z_2 = 0$. Então

$$x_1 = 0, \; y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{e} \quad z_1 = 0$$

Comparando a equação obtida com as equações das quadráticas indicadas em *iii* de 11.2.1 vemos que esta quádrica é um *hiperbolóide de duas folhas.*



Biblioteca de Ciência & Tecnologia

Exemplo 2: Para achar a figura dada pela equação

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81$$

devemos resolver

$$[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 81$$

Calculando os autovalores e autovetores respectivos (já normalizados) obtemos

$$\lambda_1 = 1,\ v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\lambda_2 = 1,\ v_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\lambda_3 = 4,\ v_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ainda,

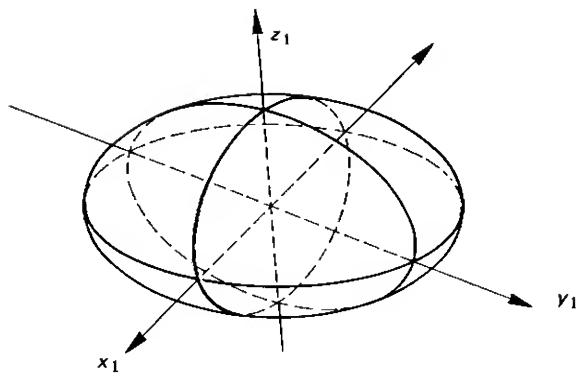
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [I]^{\substack{\text{autovetores} \\ \text{canônica}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\text{autovetores}}$$

onde $[I]^{\substack{\text{autovetores} \\ \text{canônica}}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$

Então, a equação se torna

$$[x_1 \quad y_1 \quad z_1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 81$$

ou $x_1^2 + y_1^2 + 4z_1^2 = 81$, que é um *elipsóide*.



Como não aparecem os termos lineares, se não estivermos interessados na posição dos novos eixos mas apenas no formato da figura, bastaria calcular os autovalores, escrever a equação $x_1^2 + y_1^2 + 4z_1^2 = 81$ e já teríamos identificado a quádrica.

Também no estudo das quádricas em geral, se tivermos problemas onde somente a classificação destas seja importante, não interessando suas dimensões ou posição no espaço, poderemos resolvê-los apenas estudando os sinais dos autovalores associados à forma quadrática. Seria muito interessante que você discutisse todas as possibilidades, de modo análogo ao que foi feito em 11.4.5 para cônicas.

11.6 EXERCÍCIOS

Identifique a figura e ache sua posição quando a sua equação é:

1. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - \sqrt{2}x = 0$

2. $4x^2 + 4xy + y^2 - x = 0$

3. $xy + x + y = 0$

4. $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$

5. $3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y - 25 = 0$

6. $4xy + 3y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 0$

7. $-5y^2 + 2xy - 8xz + 2yz = 0$

8. $y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}\,yz = 0$

9. $9x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 24xy - 40x + 30y = 0$

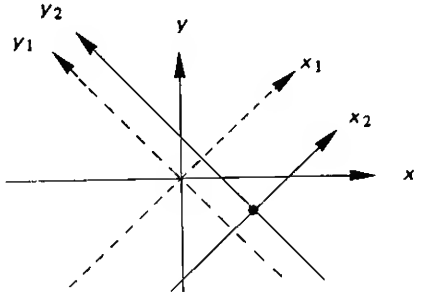
Identifique a figura. Não é necessário dar a posição.

10. $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz = 2$

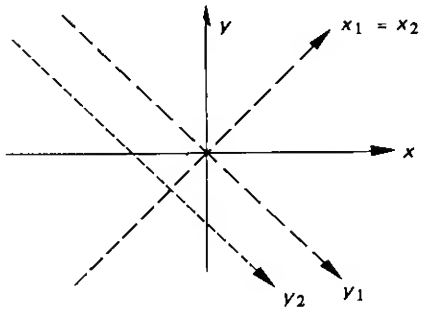
11. $y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}\,yz = 0$

11.6.1 Respostas

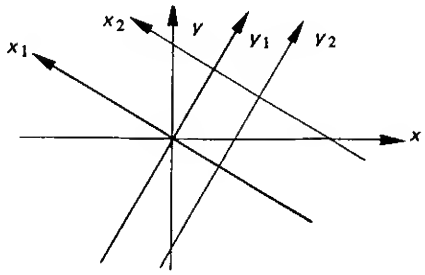
1. Elipse: $\frac{x_2^2}{\frac{3}{64}} + \frac{y_2^2}{\frac{3}{32}} = 1$ em relação ao referencial de centro no ponto $(\frac{3}{8\sqrt{2}}, \frac{-1}{8\sqrt{2}})$ e eixos x_2 na direção de $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e y_2 na direção de $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.



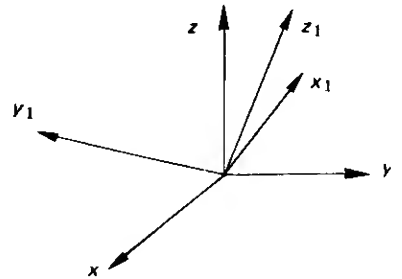
3. Hipérbole: $\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 1$ em relação ao referencial de centro no ponto $(x_1, y_1) = (-\sqrt{2}, 0)$ e eixos x_2 na direção de $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e y_2 na direção de $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.



5. Hipérbole: $x_2^2 - \frac{y_2^2}{\frac{5}{3}} = 1$ em relação ao referencial com centro no ponto $(x_1, y_1) = (-1, \frac{5}{\sqrt{3}})$ e eixos x_2 na direção de $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e y_2 na direção $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.



7. Hiperbolóide de 2 folhas de equação $-3x_1^2 - 6y_1^2 + 4z_1^2 = 1$ em relação ao referencial, com centro no ponto (0, 0, 0) e eixos x_1 na direção de $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, y_1 na direção $(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ e z_1 na direção de $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.



9. Elipsóide de equação $125x_2^2 + 125y_2^2 + 106z_2^2 = 3125$ em relação ao referencial, com centro no ponto $(x_1, y_1, z_1) = (0, -\frac{54}{125}, 0)$ e eixos x_2 na direção de (0, 0, 1), y_2 na direção de $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ e z_2 na direção de $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)$.

*11.7 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS CÔNICAS

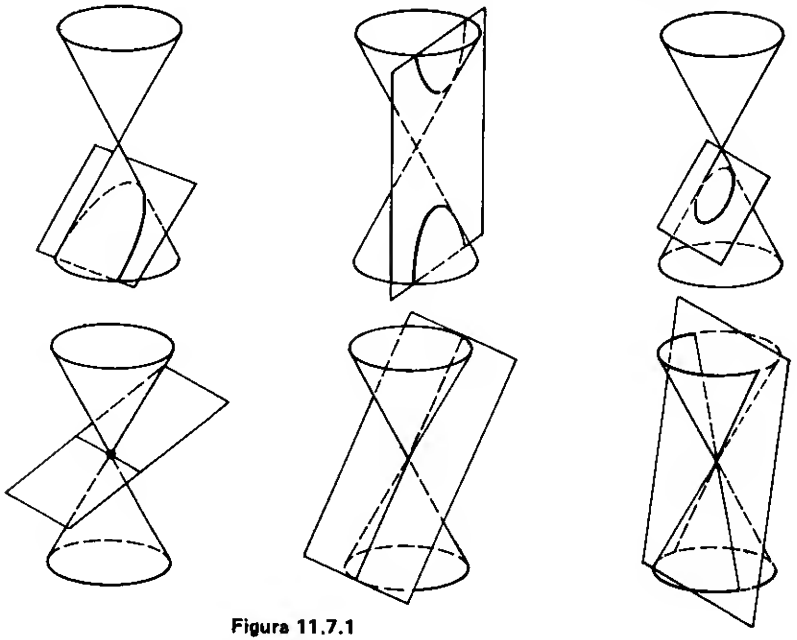


Figura 11.7.1

As cônicas, ou secções cônicas, foram estudadas pelos gregos e desenvolvidas a partir das suas propriedades geométricas. Muitos resultados aparecem resumidos nos trabalhos de Apollonius (260–170 A. C).

Para apresentar estas propriedades e definir as cônicas a partir delas vamos estudar alguns pontos e retas especiais.

Consideremos as cônicas na forma padrão:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(elipse)} \quad \text{(E)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(hipérbole)} \quad \text{(H)}$$

$$y^2 = 4ax \quad \text{(parábola)} \quad \text{(P)}$$

Suponhamos ainda $a > b > 0$.

Para a elipse e a hipérbole, definimos os pontos: $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ denominamos *focos* à esquerda e à direita.

Na elipse tomamos a *distância focal* $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e para a hipérbole $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Na parábola definimos o foco como sendo $F(a, 0)$; i.e $c = a$ (veja 11.7.1):

11.7.1

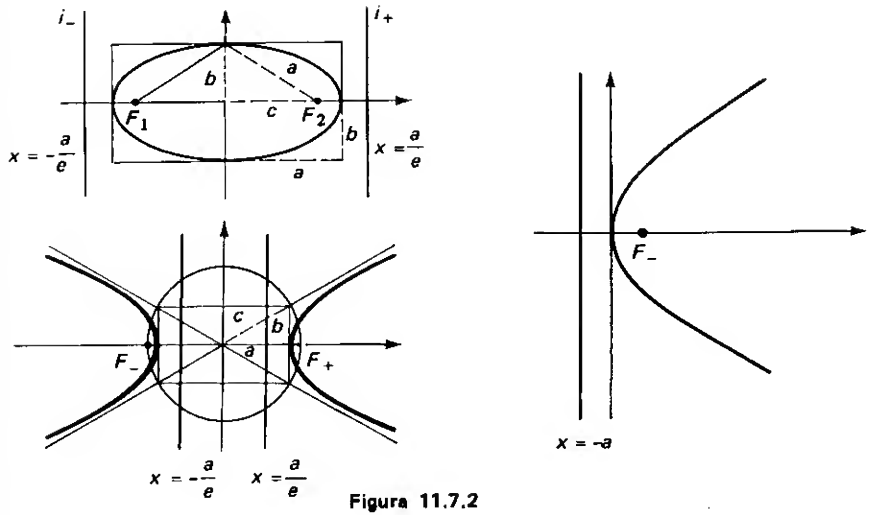


Figura 11.7.2

A *excentricidade* e é definida pela relação $e = \frac{c}{a}$.

Então, $0 \leqslant e < 1$ para uma elipse ($e = 0$ para a circunferência); $e > 1$ para a hipérbole e $e = 1$ para a parábola.

As diretrizes da elipse E ou da hipérbole H são as retas:

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{e} \quad x = \frac{a}{e}$$

(O círculo não tem diretriz.)

A *diretriz* da parábola P é única e é a reta $x = -a$.

Se na elipse ou hipérbole tivermos $b > a$, a distância focal fica sendo $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, respectivamente, e os focos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$. A extremidade passa a ser $e = \frac{c}{b}$ e as diretrizes $y = \pm \frac{b}{e}$.

11.7.2 Exercícios

1. Esboce o gráfico das cônicas a seguir, determinando seus focos, diretrizes e excentricidade. Observe depois o papel geométrico da excentricidade.

   a) $x^2 + 4y^2 = 100$
   b) $2x^2 + y^2 = 100$
   c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
   d) $x^2 + y^2 = 4$
   e) $x^2 - 4y^2 = 100$
   f) $x^2 - 2y^2 = 100$

g) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$
h) $x^2 - y^2 = 4$
i) $y^2 = x$
j) $y^2 = \frac{-1}{2}x$
k) $y^2 = 4x$
l) $y^2 = 16x$
m) $3x^2 - 4y^2 = 0$

2. Determine as cônicas representadas pelas equações abaixo, encontrando também os seus focos, diretrizes e excentricidade.

a) $25x^2 + 9y^2 - 72y - 81 = 0$
b) $9x^2 - 18y^2 + 54x - 36 = 0$
c) $x = 4y^2 - 16y + 16$

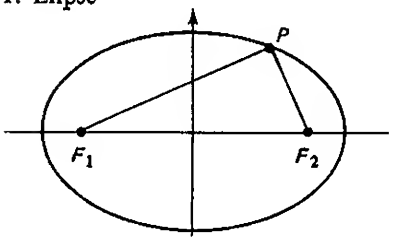
3. Dê as equações da elipse, parábola e hipérbole "centradas" em um ponto $P(m, n)$ do plano e com eixos paralelos aos eixos coordenados. Encontre também os seus focos, diretrizes e excentricidade.

4. Mostre que qualquer que seja o ponto $P(x, y)$ sobre a elipse dada no exercício 1c, a soma das distâncias deste ponto aos dois focos é igual a 10.

Podemos agora estabelecer as propriedades geométricas das cônicas.

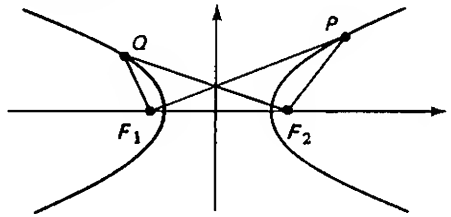
11.7.3

1. Elipse



$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

2. Hipérbole



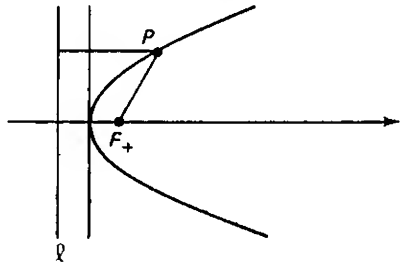
$d(F_1, P) - d(F_2, P) = 2a$
$d(F_1, Q) - d(F_2, Q) = -2a$

3.

$d(F, P) = e\,d(P, \ell)$

na parábola
$e = 1$:—

$d(F, P) = d(P, \ell)$



11.7.4 Teorema: Considere uma cônica padrão (E), (H) ou (P) de excentricidade e. Então:

1) Se $0 \leqslant e < 1$ (elipse), então para todo ponto da cônica, a *soma* das distâncias deste aos focos tem o mesmo valor $2a$ (Fig. 1).
2) Se $e > 1$ (hipérbole), então para todo o ponto da cônica a *diferença* das distâncias deste aos dois focos tem o mesmo valor absoluto (Fig. 2).
3) Se $e \neq 0$, então para todo ponto sobre a cônica, a distância deste ao foco é igual a e vezes a distância deste à diretriz. (Focos direitos com diretrizes direitas, focos esquerdos com diretrizes esquerdas. Fig. 3.)

Além disto, o que é fundamental é que *cada uma destas propriedades caracteriza as cônicas*, isto é, *1'*) um conjunto de pontos do plano que satisfaça a propriedade (*1*) será uma elipse dada pela equação (E), em relação a algum referencial; *2'* um conjunto de pontos que verifique a propriedade (*2*) será uma hipérbole (H) e *3'*) um conjunto de pontos do plano que satisfaça (*3*) será uma cônica, que satisfará (E) (H) ou (P).

Assim, como subproduto desta proposição podemos dar as definições geométricas das cônicas:

Corolário 1: A elipse pode ser definida como o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é igual a uma constante.

Note que esta constante será igual a medida do eixo maior da elipse. Por quê?

Exemplo: Encontre a equação da elipse de focos em (0, 0) e (0, 8) e eixo maior medindo 5.

Deixamos agora espaço para você:

i) Definir hipérbole pela propriedade 2.

ii) Definir parábola pela propriedade 3.

Corolário 2:

Exemplo:

Corolário 3:

Exemplo:

Finalmente dê a definição geral (geométrica) de cônica, pela propriedade 3.

Bibliote
Ciência &

Corolário 4:

Discuta e.

A demonstração da proposição 11.7.4. (ou dos corolários que ela engloba, inclusive os que você enunciou) é feita a partir do cálculo das distâncias. Tente fazê-las![1]

11.7.5 Exercícios

1. Se você fosse jardineiro e quizesse arrumar canteiros elípticos como faria?

2. Volte ao exercício 4 de 11.7.2. O que observa?

3. Encontre a equação da elipse com focos em (-1, 0) e (5, 0) e semi-eixo maior $2\sqrt{3}$.

4. Encontre a equação da elipse com focos em (0, 0), (0, 10) e semi-eixo maior $5\sqrt{5}$.

5. Encontre a equação da elipse com centro em (1, -1), semi-eixo maior 6, excentricidade $e = \frac{2}{3}$ e semi-eixo maior vertical.

6. Encontre a equação da hipérbole com focos em (0, 0) e (6, 0) e $e = \frac{3}{2}$.

7. Encontre a equação da hipérbole com focos em (0, -3) e (0, 5) e um vértice em $(0, 1 + \sqrt{10})$.

8. Encontre a equação da parábola com vértice em (2, 1) e diretriz $x = 0$.

9. Três postos de escuta estão localizados nos pontos $A(0, 0)$, $B(0, \frac{21}{4})$ e $C(\frac{25}{3}, 0)$, sendo a unidade 1 quilômetro. Os microfones localizados nestes pontos mostram que um revólver está $\frac{5}{3}$ km mais próximo de A do que de C e $\frac{7}{4}$ km mais próximo de B do que de A. Localize a posição do revólver.
(A resolução deste problema lhe dará idéia, por exemplo, de como se localiza o epicentro de um terremoto. São sempre necessários os dados de três observatórios sísmicos.)

[1] Para consultas veja Leithold, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*, volume 1, HARBRA, São Paulo, 1977, p. 491 e 497, ou Bers, L. *Calculus*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1967.

10. Encontre as retas tangentes às cônicas abaixo nos pontos indicados (use derivação implícita).

   a) $9y^2 = x$ em $(1, \frac{1}{3})$

   b) $x^2 + 25y^2 = 100$ em $(6, \frac{8}{5})$

   c) $25x^2 - y^2 = 100$ em (-3, 5, 5)

   d) $y^2 = 25x$ em (9, -15)

11. *Cônicas em Coordenadas Polares*
Usando coordenadas polares (r, θ) no plano $(x = r\cos\theta, y = r\,\text{sen}\,\theta)$ e a definição de cônica dada por 11.7.4, parte 3, você pode deduzir de modo simples as equações polares das cônicas, tomando o pólo num foco e o eixo polar e sua extensão ao longo do eixo principal[2].
   a) Mostre que nestas condições a equação polar das cônicas é dada por

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$$

   (O sinal + ou - é dado conforme a diretriz correspondente ao foco no pólo esteja à esquerda ou à direita deste.)
   b) Dê exemplos de elipses, parábolas e hipérboles com suas formas polares.
   c) Um cometa está se movendo em uma órbita parabólica em torno do sol no foco F da parábola. Faz-se uma observação do cometa quando ele está no ponto P_1 a 15 milhões de quilômetros do Sol; uma segunda observação é feita quando ele está no ponto P_2 a 5 milhões de quilômetros do Sol.
   Os segmentos de reta FP_1 e FP_2 são perpendiculares. Com estas informações há duas órbitas possíveis para o cometa. Encontre a distância mais próxima que o cometa passa do Sol, em cada órbita.
   d) A órbita do planeta Mercúrio em torno do Sol é elíptica, com o Sol em um dos focos, tendo o semi-eixo maior 36 milhões de quilômetros e excentricidade 0,206. Encontre: (*a*) qual é a distância mais próxima que Mercúrio passa do Sol e (*b*) a maior distância possível entre Mercúrio e o Sol.

12. *Equações Paramétricas da Elipse*
   a) Mostre que as equações paramétricas $x = a\cos t$ e $y = b\,\text{sen}\,t$, $a > 0$, $b > 0$ e $0 \leqslant t < 2\pi$ definem uma elipse cuja equação em coordenadas cartesianas é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
   b) Mostre que as equações $x = a\cos(-2t)$ e $y = b\cos(-2t)$, $0 \leqslant t < \pi$, definem a mesma elipse dada em (*a*). Encontre os "vetores-velocidade"

[2] Consulte Leithold, L. *op. cit.*, caps. 11 e 12.

nos casos (*a*) e (*b*). ($\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$)

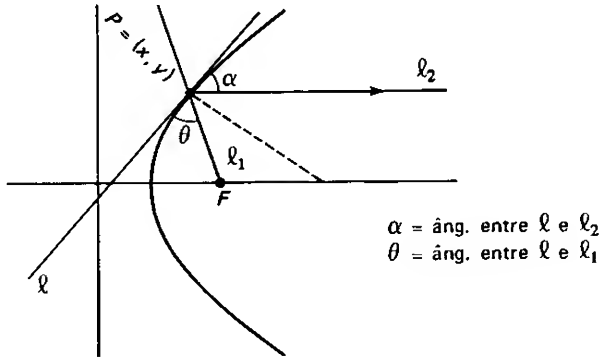
c) Use o item (*a*) para traçar a partir de duas circunferências concêntricas de raios a e b a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

13. *Propriedade Reflexiva das Cônicas*
Um exemplo de aplicação da propriedade reflexiva das cônicas é dado pelos espelhos parabólicos, cujo formato é obtido pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria. Tais espelhos transformam uma fonte luminosa colocada no foco em um feixe de raios paralelos (como num holofote) ou, reciprocamente, podem concentrar um feixe de raios paralelos em um único ponto (como no telescópio). Estas propriedades são explicadas por dois fatores:

i) A lei física que governa o movimento das ondas (o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão).

ii) O teorema a seguir.

Teorema: Sejam P um ponto de uma parábola e ℓ a reta tangente à parábola em P. Sejam ℓ_1 a reta ligando o foco a P e ℓ_2 a reta que passa por P e é paralela ao eixo, então os ângulos θ e α a seguir são iguais.

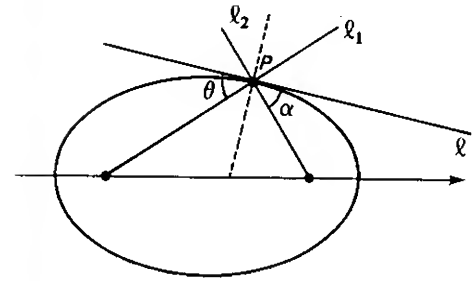


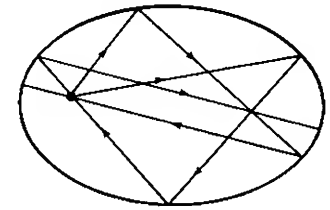
Demonstre este teorema.

14. Num espelho com a forma de um elipsóide de revolução, toda luz que emana de um dos focos se reflete sobre o outro foco. Este fenômeno é explicado por dois fatores: (*i*) Lei física da reflexão: ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão, (*ii*) Propriedade "reflexiva" da elipse que você mostrará a seguir.

Esta propriedade pode ter usos sérios (como por exemplo num laser) ou jocosos como uma sala de cochichos. (Se estivermos numa sala elipsoidal todo o som, que também é onda, emanado de um foco será perfeitamente audível no outro foco.)

Teorema: Sejam P um ponto da elipse e ℓ a reta tangente a esta em P. Sejam ℓ_1 a reta ligando o foco F_1 a P e ℓ_2 a reta ligando o outro foco F_2 a P. Então os ângulos θ entre as retas ℓ e ℓ_1 e α entre ℓ_2 e ℓ são iguais.





Demonstre este teorema.

Leituras Sugeridas e Referências

[1] Bers, L.; *Calculus*; Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1967.
[2] Kemeny, J., Snell, J. e Thompson, G.; *Introduction to Finite Mathematics*; Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1957.
[3] Pitombeira de Carvalho, J.; *Introdução à Álgebra Linear*; Impa, Rio de Janeiro, 1972.
[4] Leithold, L.; *O Cálculo com Geometria Analítica*; HARBRA, São Paulo, 1977.

12

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

12.1 INTRODUÇÃO

Considere a seguinte situação: Um foguete está subindo verticalmente a partir do solo, sujeito à força gravitacional (que é de cima para baixo e supomos constante e igual a mg), a uma força constante para cima e a um impulso adicional para cima, proporcional ao tempo t decorrido depois do lançamento. Que altura ele atinge t segundos após o lançamento?

Denotando por x a altura, e usando o princípio de que força é igual a massa vezes aceleração (segunda lei de Newton), podemos escrever:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = a + bt - mg$$

Ao resolvermos esta equação teremos solucionado o nosso problema.[1]

Este exemplo ilustra como somos levados a utilizar equações envolvendo derivadas. Assim como este, muitos outros fenômenos em Física, Química, Biologia, Economia etc., são descritos por *equações diferenciais*.

[1] A resolução do problema é simples, bastando integrar duas vezes a equação e impor as condições iniciais $x(0) = 0$ e $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$ sendo $v(0)$ a velocidade inicial.

Neste capítulo, presumiremos um conhecimento sobre derivadas de uma função de uma variável. Estaremos particularmente interessados na resolução de sistemas de equações diferenciais, onde são amplamente utilizados os conceitos de espaço vetorial, base, autovalores e autovetores.

12.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equações diferenciais são aquelas que relacionam uma função e suas derivadas. Por exemplo, as equações

i) $\frac{dx}{dt} - 2t = 0$

ii) $\frac{dx}{dt} = 3x$

iii) $\frac{d^2x}{dt^2} = 1 + \frac{dx}{dt}$

são equações diferenciais.

Para resolver uma equação algébrica (por exemplo, $x^2 - 3x + 2 = 0$) procuramos números (1 e 2 no caso). Para resolver uma equação diferencial vamos procurar funções que satisfaçam a equação. Por exemplo:

$x = t^2$ é uma solução da equação *i*). Uma outra solução de *i*) é $x = t^2 + 5$. O conjunto de todas as soluções de *i*) é expresso por $x = t^2 + c$, c constante.

$x = e^{3t}$ é uma solução de *ii*), pois $\frac{d(e^{3t})}{dt} = 3e^{3t}$. Uma outra solução de *ii*) é $x = 2e^{3t}$.

Podemos mostrar ainda que as soluções de *ii*) são exatamente as funções da forma $x = ke^{3t}$, sendo k uma constante. Temos, portanto, infinitas soluções para *ii*), assim como em *i*).

Suponhamos agora que precisamos de uma solução de *ii*) tal que $x(0) = -5$. Temos então $x(t) = ke^{3t}$ e como $x(0) = -5$, devemos ter $-5 = ke^{3 \cdot 0}$, o que implica $k = -5$. Isto é, a única solução para o problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x \\ x(0) = -5 \text{ (condição inicial)} \end{cases}$$

é $x(t) = -5e^{3t}$.

De modo geral as equações do tipo de *ii*), ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

são chamadas de *equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem a coeficientes constantes* e admitem como *solução geral*[2].

$$x = ke^{at}.$$

Isto é, a expressão acima determina o conjunto de *todas* as soluções da equação, variando-se o valor de k.

Para comprovarmos que realmente é solução geral, devemos considerar as equivalências:

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x \iff \frac{dx}{dt} - ax = 0 \iff \left(\frac{dx}{dt} - ax\right)e^{-at} = 0 \cdot e^{-at} \iff$$

$$\iff \frac{dx}{dt}e^{-at} ax \cdot e^{-at} = 0 \iff \frac{d(x \cdot e^{-at})}{dt} = 0 \iff$$

$$\iff x \cdot e^{-at} = k(\text{constante}) \iff x = ke^{at},\ k \in \mathbf{R}$$

Agora, ao invés de uma única equação diferencial, podemos considerar sistemas de equações diferenciais. Estaremos então procurando um conjunto de funções que satisfaçam simultaneamente várias equações diferenciais. Chamamos tal conjunto de funções de solução do sistema de equações diferenciais. Vamos procurar também o que chamamos de solução geral do sistema, que é uma expressão que gera toda solução do sistema.

12.2.1 Exemplos

Exemplo 1: Encontre todas as funções reais diferenciáveis $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ que satisfaçam o sistema, isto é, encontre a solução geral do sistema:

$$(\S)\ \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 4x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Resolução:

Se denotarmos

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ e } \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema (§) na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}, \text{ onde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Uma solução deste sistema é, então, uma matriz

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

cujos elementos são funções que solucionam o sistema de equações (§).

Com base na solução geral da equação $\frac{dx}{dt} = ax$, que é $x = ke^{at}$ (veja o final da secção 12.2), vamos ver se existe, para o sistema, uma solução do tipo:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

Neste caso, calculando $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$, temos

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} ae^{\lambda t} \\ be^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda ae^{\lambda t} \\ \lambda be^{\lambda t} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

Para que $\mathbf{X}$ seja solução, devemos ter $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$, e dessa forma ficamos com

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

ou seja,

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Pensando em $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{v}$ como um vetor de $\mathbf{R}^2$, a última equação se torna

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$$

que é exatamente a equação de autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A}$.

Concluímos, então, que $\mathbf{X} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ é solução do sistema se, e somente se λ é autovalor e $\mathbf{v}$ é autovetor da matriz $\mathbf{A}$.

Procurando os autovalores e autovetores de A, resolvemos

$$\det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Isto implica que $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, ou seja, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Para $\lambda_1 = 1$ obtemos o autovetor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, uma solução para o sistema será

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1 \cdot t}$$

Para $\lambda_2 = 2$ obtemos o autovetor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ e teremos outra solução, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{v}_2 e^{2t}$, isto é,

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, vemos que $\mathbf{X}_1$ não é múltiplo de $\mathbf{X}_2$ (ou vice-versa) e dizemos então que $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ são soluções independentes do sistema.

Além disto, como veremos em 12.3.1, o conjunto das soluções

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

do sistema (§) é um espaço vetorial V de dimensão 2 e, portanto, duas soluções independentes geram V. Isto é, qualquer outra solução $\mathbf{X}$ é combinação linear de $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$. Portanto a solução geral do sistema é:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

sendo c_1 e c_2 constantes. Na verdade, V é um espaço vetorial complexo (veja a secção 12.3.1) e assim c_1 e c_2 são números complexos. Dependendo do interesse, porém, pode-se considerar apenas as soluções reais, tomando c_1 e c_2 reais.

Ou ainda, como

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + 4c_2 e^{-2t} \\ c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \end{bmatrix}$$

as funções soluções do sistema são

$$x_1(t) = c_1 e^t + 4c_2 e^{-2t}$$
$$x_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

Biblioteca de
Ciência & Tecnol
UFPe

sendo c_1 e c_2 arbitrários.

Se impusermos ao Exemplo 1, colocado acima, as condições iniciais

$$x_1(0) = -1 \quad \text{e} \quad x_2(0) = 2,$$

temos:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t + 4c_2 e^{-2t} \\ x_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \end{cases}$$

para $t = 0$

$$\begin{cases} -1 = c_1 + 4c_2 \\ 2 = c_1 + c_2 \end{cases}$$

que implica que $c_1 = 3$ e $c_2 = -1$

Portanto, substituindo,

$$\begin{cases} x_1 = 3e^t - 4e^{-2t} \\ x_2 = 3e^t - e^{-2t} \end{cases}$$

Esta é a única solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 4x_2 \\ \qquad\qquad \text{tal que } x_1(0) = -1 \text{ e } x_2(0) = 2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

No exemplo anterior obtivemos dois autovalores reais distintos. O sistema se resolve da mesma maneira, no caso de autovalores complexos distintos, como foi colocado no exemplo abaixo.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

Temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\lambda_2 = 1 - 2i \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto a solução geral é

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} + c_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-2i)t}$$

Ainda se faz necessário indicar outro exemplo importante, onde ocorrem autovalores complexos.

Exemplo 3: (oscilador harmônico simples)

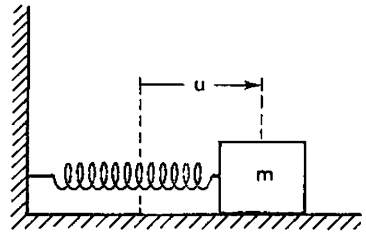


Figura 12.2.1

Consideremos um corpo rígido de massa m preso a uma mola cuja constante de elasticidade é k ($k > 0$). Suponhamos que não haja atrito e que a massa da mola seja desprezível em relação a m. Sejam u o deslocamento do corpo e v sua velocidade. Inicialmente, quando $t = 0$, o corpo apresenta-se deslocado de u_0 e parado ($v_0 = 0$).

Usando a segunda lei de Newton, montamos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{k}{m}u \\ \dfrac{du}{dt} = v \end{cases}$$

cujas condições iniciais são:

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{du}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$$

Os autovalores e autovetores da matriz são:

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i\sqrt{k/m} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -i\sqrt{k/m} \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema é então

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} i\sqrt{k/m} \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\sqrt{k/m}\,t} + c_2 \begin{bmatrix} -i\sqrt{k/m} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\sqrt{k/m}\,t}$$

Impondo as condições iniciais, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\sqrt{\frac{k}{m}}\,c_1 - i\sqrt{\frac{k}{m}}\,c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

ou seja, $c_1 = c_2 = \frac{u_0}{2}$.

Portanto, a solução procurada é

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \frac{u_0}{2} \begin{bmatrix} i\sqrt{\frac{k}{m}}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right) \\ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{bmatrix}$$

Usando as relações de números complexos

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

temos finalmente a solução:

$$v = -u_0\sqrt{\frac{k}{m}}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

$$u = u_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

12.2.2 Resta-nos ainda analisar o caso de sistemas de 2 equações em que a matriz A admite apenas um autovalor λ. Temos então duas situações:

i) A admite dois autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ LI.

ii) A admite apenas um autovetor v LI.

No caso *i)* obtemos duas soluções LI, $X_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t}$ e $X_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda t}$
A solução geral é então

$$X = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda t}$$

No caso *ii)* obtemos somente uma solução do tipo $\mathbf{v}e^{\lambda t}$. Entretanto, podemos mostrar que existe uma outra solução LI com a anterior, do tipo

$$\begin{bmatrix} c_1 t + d_1 \\ c_2 t + d_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

Substituindo-a no sistema, encontramos os valores para c_1, c_2, d_1 e d_2, e então a solução geral é

$$X = c_1\mathbf{v}e^{\lambda t} + c_2 \begin{bmatrix} c_1 t + d_1 \\ c_2 t + d_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

Este método usado para obtermos uma segunda solução é conhecido como método da variação dos parâmetros[2].

---

[2] Para maiores detalhes consulte, por exemplo, Pais Leme, P.J.S.; *Notas de Equações Diferenciais Ordinárias*, Impa, Rio, 1972; e Leighton, W.; *Equações Diferenciais Ordinárias;* Livros Técnicos e Científicos, Rio, 1970.

Você entenderá melhor este método ao resolver o Exercício 5 da secção 12.4.

12.2.3 Caso Geral: Só resolvemos até aqui sistemas de duas equações. Porém, tudo o que fizemos pode ser extrapolado para n equações, com as adaptações necessárias. Também neste caso a resolução é mais simples quando obtemos n autovetores LI.

Exemplo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 14x + 66y - 42z \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 24y - 14z \\ \dfrac{dz}{dt} = 10x + 55y - 33z \end{cases}$$

A matriz é

$$\begin{bmatrix} 14 & 66 & -42 \\ 4 & 24 & -14 \\ 10 & 55 & -33 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores e autovetores LI associados, temos:

$\lambda_1 = 2$ com $\mathbf{v}_1 = (-11, 2, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (7, 0, 2)$
$\lambda_2 = 1$ com $\mathbf{v}_3 = (6, 2, 7)$.

Portanto, a solução geral é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} e^{t}$$

Vamos analisar agora os casos em que num sistema de três equações não conseguimos três autovetores LI para a matriz A.

i) Se o polinômio característico é da forma $(\lambda - a)^2(\lambda - b)$, e associado ao autovalor a conseguirmos apenas um autovetor LI, procuramos uma terceira solução independente da forma

$$\mathbf{X}_3(t) = \begin{bmatrix} c_1 t + d_1 \\ c_2 t + d_2 \\ c_3 t + d_3 \end{bmatrix} e^{at}$$

ii) Se o polinômio característico é da forma $(\lambda - a)^3$, então podemos ter duas situações:

a) ao autovalor a estão associados dois autovetores LI, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Neste caso temos duas soluções LI: $\mathbf{v}_1 e^{at}$ e $\mathbf{v}_2 e^{at}$ e existe, como em *i*), a terceira solução LI exatamente como a dada acima.

b) ao autovalor a está associada apenas um autovetor v LI. Temos então uma única solução LI da forma $\mathbf{X}_1 = \mathbf{v}e^{at}$.

Neste caso mostramos que existem mais duas soluções LI da forma

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} c_1 t + d_1 \\ c_2 t + d_2 \\ c_3 t + d_3 \end{bmatrix} e^{at} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} m_1 t^2 + n_1 t + k_1 \\ m_2 t^2 + n_2 t + k_2 \\ m_3 t^2 + n_3 t + k_3 \end{bmatrix} e^{at}$$

Aqui, como nos itens anteriores, as constantes, c_i, d_i, m_i etc. são determinadas substituindo-se as soluções no sistema.

12.3 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE n EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS DE 1ª ORDEM A COEFICIENTES CONSTANTES

Esta seção envolve um problema genérico, que consiste em procurar um conjunto de n funções reais que satisfaça, ao sistema:

$$(\S) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n_1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

onde os a_{ij} s são constantes reais. Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$.

Uma solução será uma matriz $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, cujos elementos são funções que solucionam o sistema (§).

O fato essencial que relaciona sistemas deste tipo com a Álgebra Linear é dado pelo teorema seguinte.

12.3.1 Teorema: O conjunto S de todas as soluções do sistema $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$ é um espaço vetorial (complexo) de dimensão n.

Prova: De fato, observamos que se $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ são soluções do sistema, então $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ e $k\mathbf{X}$ ($k \in \mathbf{C}$) são soluções, pois

$$\frac{d(\mathbf{X} + \mathbf{Y})}{dt} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AX} + \mathbf{AY} = \mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})$$

Isto é, $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ é solução. (Um procedimento análogo é usado para mostrar que $k\mathbf{X}$ é solução do sistema.

Vemos assim que S é um espaço vetorial complexo (subespaço do espaço vetorial das funções definidas em $\mathbf{R}$ com valores complexos). Para mostrarmos que a dimensão de S é n, isto é, que existem n e não mais que n soluções linearmente independentes, precisamos do *Teorema da existência e unicidade de solução de um sistema de equações diferenciais com condição inicial*[3].

12.3.2 A proposição anterior pode ser utilizada para se achar a solução geral de um sistema. Assim, se encontrarmos n soluções linearmente independentes do sistema

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}, \ \mathbf{X}_1, \ ..., \ \mathbf{X}_n, \text{ (isto é } \frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \mathbf{AX}_i)$$

[3] A demonstração deste teorema não será feita aqui, mas se você estiver interessado em estudá-la veja, por exemplo, Paes Leme, op. cit. p. 56.

podemos gerar todas as soluções do sistema, e qualquer uma delas será da forma:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + ... + c_n\mathbf{X}_n \ (c_i \in \mathbf{C}).$$

Note que cada solução $\mathbf{X}_i$ é uma matriz $n \times 1$ de funções:

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_{i1}(t) \\ \vdots \\ x_{in}(t) \end{bmatrix}$$

12.4 EXERCÍCIOS

1. Uma colônia de bactérias cresce a uma razão diretamente proporcional ao número de bactérias presentes. (Se chamarmos de $B(t)$ a quantidade de bactérias depois de um tempo t, isto significa que $\frac{d}{dt}B(t) = k \cdot B(t)$, k = = constante.) Se o número de bactérias triplica em duas horas, quanto tempo será necessário para que tenhamos cinqüenta vezes a quantidade inicial?

Nos Exercícios de 2 a 5, dê a solução dos sistemas lineares.

2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 4y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x \\ \frac{dy}{dt} = -5y \end{cases}$

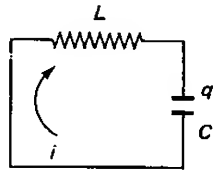
com condição inicial $x(0) = 1$, $y(0) = 2$

4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -9x + 19y + 4z \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 7y + z \\ \frac{dz}{dt} = -7x + 17y + 2z \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$

Biblioteca de Ciências & Tecnolo UFPel

6. Num circuito LC, seja um indutor de indutância L ligado em série com um capacitor de capacitância C. Seja i a corrente que circula no circuito e q a carga no capacitor.



Suponhamos, inicialmente, que a corrente no circuito seja i_0 e o capacitor tenha uma carga q_0. Sabendo que a diferença de potencial no indutor é $L\frac{di}{dt}$ e no capacitor é $\frac{q}{C}$, temos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0 \\ \dfrac{dq}{dt} = i \end{cases}$$

Encontre as expressões da carga e da corrente em função do tempo.

12.4.1 Respostas

1. $\dfrac{2\ \ell n\ 50}{\ell n\ 3}$

2. $x(t) = c_1e^t + 3c_2e^{-t}$
   $y(t) = c_1e^t + 5c_2e^{-t}$

3. $x(t) = e^{-5t}$
   $y(t) = 2e^{-5t}$

4. $x(t) = c_1(9 - 4i)e^{it} + c_2(9 + 4i)e^{-it} + 3c_3$
   $y(t) = c_1(3 - i)e^{it} + c_2(3 + i)e^{-it} + c_3$
   $z(t) = c_1(7 - 2i)e^{it} + c_2(7 + 2i)e^{-it} + 2c_3$

5. Solução: A matriz associada é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

   $\lambda = 2$ e $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, o único LI. Uma solução é $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$.

Outra solução LI é do tipo

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} c_1t + d_1 \\ c_2t + d_2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Então $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}_2$

Como

(*i*) $\dfrac{d\mathbf{X}_2}{dt} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} c_1t + d_1 \\ c_2t + d_2 \end{bmatrix} 2e^{2t}$

e (*ii*) $\mathbf{AX}_2 = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2)t + (d_1 + d_2) \\ (3c_2 - c_1)t + (3d_2 - d_1) \end{bmatrix} e^{2t}$

Igualando (*i*) e (*ii*), temos:

$$2c_1t + 2d_1 + c_1 = (c_1 + c_2)t + d_1 + d_2$$
$$2c_2t + 2d_2 + d_1 = (3c_2 - c_1)t + 3d_2 - d_1$$

Como isto é uma identidade de polinômios, igualando os coeficientes, temos:

$-c_1 + c_2 = 0$, $-d_1 + d_2 = c_1$, $-c_1 + c_2 = 0$ e $-d_1 + d_2 = c_2$

Portanto, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $d_1 = 0$ e $d_2 = 1$ e

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} t \\ t + 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

A solução geral é

$$x(t) = k_1e^{2t} + k_2te^{2t}$$
$$y(t) = k_1e^{2t} + k_2(t + 1)e^{2t}$$

6. $i(t) = \alpha ke^{kt} + \beta ke^{-kt}$
   $q(t) = \alpha e^{kt} - \beta e^{-kt}$

   onde $\alpha = \dfrac{i_0 + kq_0}{2k}$, $\beta = \dfrac{i_0 - kq_0}{2k}$ e $k = \dfrac{1}{\sqrt{-cL}}$

Leituras Sugeridas e Referências

[1]Bentley, D. e Cooke, K.; *Linear Algebra with Differential Equations;* Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1973.
[2]Leighton, W.; *Equações Diferenciais Ordinárias;* Livros Técnicos e Científicos, Rio, 1970.
[3]Pais Leme, P.J.S.; *Notas de Equações Diferenciais Ordinárias*; Impa, Rio, 1972.

13

PROCESSOS ITERATIVOS E ÁLGEBRA LINEAR

13.1 INTRODUÇÃO

Em qualquer problema concreto é necessário não apenas saber que uma solução existe, mas também chegar a esta solução em termos numéricos. Os problemas que aparecem na prática, no entanto, envolvem tantas variáveis ou são tão difíceis que tornam-se praticamente impossíveis de serem resolvidos sem o uso de recursos como calculadoras, computadores etc.. (Tente, por exemplo, resolver um sistema linear de 100 equações e 100 incógnitas.) Há necessidade, então, de desenvolver processos numéricos que possam ser usados em computação eletrônica. Estes processos podem ser divididos em dois grupos: processos exatos e processos iterativos.

Por um *processo exato* entendemos um processo através do qual se obtém a solução numérica de um problema por meio de um número finito de operações elementares. O método de resolução de sistemas lineares por redução da matriz, que vimos no Capítulo 2, é um exemplo de processo numérico exato que pode ser programado e usado em computadores (embora para este fim existam outros métodos exatos de resolução de sistemas lineares que são melhores, como o método de Gauss que utiliza uma quantidade menor de operações, reduzindo o tempo de uso do computador e possibilitando, conseqüentemente, uma maior economia).

Um *processo iterativo* de resolução de um problema é um processo em que se obtém uma seqüência de soluções aproximadas do problema, tal que cada termo da seqüência é obtido a partir dos anteriores por um processo bem determinado e que, num certo sentido, está "cada vez mais perto" da solução correta do problema.

A escolha de um ou outro processo (quando houver esta possibilidade) vai depender de uma série de fatores: da precisão desejada dos resultados (e aqui devemos ressaltar que a expressão *processo exato* não quer dizer que se encontre a resposta correta, sem erro algum. Este erro quase sempre aparece na prática, pois as máquinas calculadoras têm apenas um número finito de dígitos e assim, em cada operação haverá um erro de arredondamento), da capacidade de memória do computador empregado, do tempo despendido em computação, do problema em particular. Por exemplo, o processo iterativo é melhor quando as matrizes envolvidas são esparsas, isto é, com muitos zeros, ou quando existe uma fórmula para calcular os elementos da matriz, evitando que seja necessário o armazenamento etc. Por razões técnicas, durante vários anos houve preferência generalizada pelos processos iterativos, mas com o desenvolvimento de computadores em grande capacidade de memória e rapidez, os processos exatos voltaram a ser interessantes do ponto de vista prático e, atualmente, são competitivos com os processos iterativos. Estes últimos, no entanto, continuam a ser muito importantes e serão os que estudaremos aqui através de sua conexão com Álgebra Linear.

Suporemos que você saiba um pouco (não muito) sobre limites e seqüências de números.

13.2 SEQÜÊNCIAS DE MATRIZES

Começaremos considerando uma seqüência infinita de matrizes de ordem $r \times s$, $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$, onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1s}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^{(1)} & a_{r2}^{(1)} & \ldots & a_{rs}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \ldots & a_{1s}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^{(2)} & a_{r2}^{(2)} & \ldots & a_{rs}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$\ldots, A_n = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \ldots & a_{1s}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^{(n)} & a_{r2}^{(n)} & \ldots & a_{rs}^{(n)} \end{bmatrix}, \ldots$$

com todos os $a_{ij}^{(k)}$ números reais ou complexos. Representamos tal seqüência por $\{\mathbf{A}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$

13.2.1 Definição: Dizemos que a seqüência $\{\mathbf{A}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de matrizes *converge* para (ou se aproxima de, ou ainda tem como limite) a matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ (de mesma ordem) se os elementos das matrizes $\mathbf{A}_n$ se aproximam dos elementos correspondentes da matriz A, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij} \text{ para } \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, r \\ j = 1, 2, \ldots, s \end{cases}$$

Neste caso, usaremos a notação

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_n = \mathbf{A} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}$$

Exemplo: Seja a seqüência $\{\mathbf{A}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ onde

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 1 + \frac{5}{n^2} \\ 3 & \frac{3n+1}{2n} \end{bmatrix}$$

Então, $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ 3 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$ etc. e $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Um caso particular importante da definição anterior é quando as matrizes são vetores-coluna, $\mathbf{X}_n$. Neste caso,

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ \vdots \\ x_r^{(n)} \end{bmatrix} \to \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}$$

se $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$ para $i = 1, 2, \ldots, r$.

13.2.2 Definição: Usando as notações da definição 13.2.1, dizemos que a *série de matrizes* (soma de infinitas matrizes)

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{n+1} + \ldots$$

tem como soma uma matriz S e escrevemos $\mathbf{S} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots$ se a seqüência $\{\mathbf{B}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, onde $\mathbf{B}_n = \mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_n$ tem como limite a matriz S, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_n) = \mathbf{S}$$

Como o limite de uma seqüência de matrizes é formado pelos limites dos elementos, certas propriedades de limites de seqüências de números também são válidas para seqüências de matrizes. Por exemplo, constantes multiplicativas podem ser colocadas fora do limite em seqüências numéricas, isto é, $\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$, o mesmo valendo para matrizes. Isto é, se $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ são matrizes constantes, então

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A}_n) = \mathbf{Q}_1 \cdot \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} (\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{Q}_2) = (\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_n) \cdot \mathbf{Q}_2,$$

desde que sejam possíveis as operações.

Os resultados que vêm a seguir mostram outras situações em que, sob certos aspectos, as seqüências de matrizes comportam-se como seqüências de números. A primeira delas é que, dado um número real ou complexo a, com $|a| < 1$, as potências de $|a|$ são números cada vez mais próximos de zero, isto é, $\lim_{k\to\infty} |a|^k = 0$, e portanto $\lim_{k\to\infty} a^k = 0$. Além disso, se $|a| > 1$, $\lim_{k\to\infty} a^k$ não é zero.

Você deve conhecer ainda que se tivermos uma seqüência de números que é uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão a, com $|a| < 1$, então a soma dos termos (infinitos) desta progressão existe e é dada por

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^k + \ldots = \frac{1}{1-a}$$

Estes dois resultados também são válidos (com certas modificações) para seqüências de matrizes, como veremos nos teoremas 13.2.4, 13.2.5 e 13.3.7.

No que se segue, estaremos considerando todos os autovalores de uma matriz quadrada A, inclusive os complexos, mesmo que A tenha apenas elementos reais.

13.2.3 Teorema: Seja A uma matriz quadrada $r \times r$. Então $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ (matriz nula $r \times r$) se e somente se todos os autovalores de A têm módulo menor que 1.

Prova: Suponhamos que A seja diagonalizável. Existe então uma matriz inversível, Q, tal que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

onde os λ_i são os autovalores de A, isto é,

$$A = Q \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_r \end{bmatrix} \cdot Q^{-1}$$

Vê-se facilmente (por indução) que

$$A^k = Q \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_r \end{bmatrix}^k \cdot Q^{-1} = Q \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_r^k \end{bmatrix} \cdot Q^{-1}$$

E portanto,

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} Q \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r^k \end{bmatrix} \cdot Q^{-1} = Q\left(\lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & \lambda_r^k \end{bmatrix}\right) Q^{-1}$$

Como $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$, ..., $|\lambda_r| < 1$, então $\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0$ para $i = 1, \dots, r$

e portanto,

$$\lim_{k\to\infty} A^k = Q \cdot 0 \cdot Q^{-1} = 0$$

Vamos mostrar agora que, se $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$, então $|\lambda_i| < 1$ para $i = 1, \dots, r$.

Suponhamos, por absurdo, que um dos autovalores, por exemplo o λ_1, tem módulo maior ou igual a 1. Então, $\lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \neq 0$. Dessa forma

$$\lim_{k\to\infty} A^k = Q\left(\lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} \lambda_1^k \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \cdots & \lambda_r^k \end{bmatrix}\right) Q^{-1} \neq 0$$

o que contradiz o fato inicial de que $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$. Portanto, todos os autovalores devem ter módulo menor que 1.

O caso geral, isto é, quando A não é diagonalizável, é feito de modo análogo só que, no lugar da forma diagonal, é usada a forma de Jordan. Depois, tente fazer esta demonstração, como exercício. A dificuldade estará em se estabelecer a expressão da n-ésima potência da forma de Jordan da matriz A.

Vejamos mais uma situação em que as seqüências de matrizes apresentam um comportamento semelhante às seqüências de números.

13.2.4 Teorema: Seja A uma matriz quadrada $r \times r$. Então, $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ se e somente se $I - A$ é uma matriz inversível e $I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots = (I - A)^{-1}$, onde I é a matriz identidade $r \times r$.

Prova: Suponhamos primeiro que $I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots = (I - A)^{-1}$, isto é, que $\lim_{k\to\infty} (I + A + \dots + A^k) = (I - A)^{-1}$.

Portanto, $\lim_{k\to\infty} (I + A + \dots + A^k + A^{k+1}) = (I - A)^{-1}$.

Subtraindo as duas igualdades, temos

$$0 = (I - A)^{-1} - (I - A)^{-1} = \lim_{k\to\infty} (I + A + \dots + A^k + A^{k+1}) - \lim_{k\to\infty} (I + A + \dots + A^k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} A^{k+1} = \lim_{k\to\infty} A^k.$$

Suponhamos, por outro lado, que $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$. Pelo teorema anterior vemos que os autovalores de A têm módulo menor que 1 e, portanto, o número 1 não é autovalor, o que implica $\det(A - 1 \cdot I) \neq 0$. Então, a matriz $A - 1 \cdot I$ é inversível. Assim, $I - A$ também é inversível e $(I - A)^{-1}$ existe. Vale ainda a identidade

$$(I + A + A^2 + \dots + A^k)(I - A) = I - A^{k+1}.$$

Multiplicando pela direita por $(I - A)^{-1}$, temos

$$I + A + A^2 + \dots + A^k = (I - A)^{-1} - A^{k+1}(I - A)^{-1}$$

Então $I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots$

$$= \lim_{k\to\infty} (I + A + \dots + A^k) = \lim_{k\to\infty} [(I - A)^{-1} - A^{k+1}(I - A)^{-1}]$$

$$= (I - A)^{-1} \quad \text{pois} \quad \lim_{k\to\infty} A^{k+1} = 0.$$

Reunindo os resultados dos dois teoremas anteriores obtemos:

13.2.5 Corolário: Se A é uma matriz quadrada, então os autovalores de A têm todos módulo menor que 1 se, e somente se a matriz $I - A$ é inversível e vale

$$I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots = (I - A)^{-1}.$$

13.3 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES — PROCESSO ITERATIVO

Vejamos, agora, como esses fatos podem ser usados para resolver sistemas lineares. Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} 1{,}03x - 0{,}02y = 7 \\ 0{,}01x + 0{,}90y = -5{,}2 \end{cases}$$

Observamos que ele pode ser colocado na forma

$$x = -0{,}03x + 0{,}02y + 7$$
$$y = -0{,}01x + 0{,}10y - 5{,}2$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}03 & 0{,}02 \\ -0{,}01 & 0{,}10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -5{,}2 \end{bmatrix}$$

Chamando $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0{,}03 & 0{,}02 \\ -0{,}01 & 0{,}10 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5{,}2 \end{bmatrix}$, vemos que uma solução do sistema é exatamente um vetor-coluna $\mathbf{X}$ que satisfaça $\mathbf{X} = \mathbf{MX} + \mathbf{N}$.

Queremos saber se existe algum processo iterativo para determinar tal $\mathbf{X}$. Iniciemos o processo com um vetor qualquer $\mathbf{X}_1$. Por exemplo, tomemos $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Se calcularmos

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{MX}_1 + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -0{,}03 & 0{,}02 \\ -0{,}01 & 0{,}10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -5{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}97 \\ -5{,}21 \end{bmatrix}$$

e se usarmos o vetor obtido para obter $\mathbf{X}_3$, teremos

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{MX}_2 + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -0{,}03 & 0{,}02 \\ -0{,}01 & 0{,}10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6{,}97 \\ -5{,}21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -5{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}6867 \\ -5{,}7907 \end{bmatrix}$$

Analogamente, se usarmos $\mathbf{X}_3$ para obter $\mathbf{X}_4$, teremos

$$\mathbf{X}_4 = \mathbf{MX}_3 + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -0{,}03 & 0{,}02 \\ -0{,}01 & 0{,}10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6{,}6867 \\ -5{,}7907 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -5{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}683585 \\ -5{,}845937 \end{bmatrix}$$

Se em cada passo procedermos analogamente, isto é, uma vez obtido $\mathbf{X}_n$, obtemos $\mathbf{X}_{n+1}$ pela fórmula $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{MX}_n + \mathbf{N}$, teremos montada uma seqüência $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de vetores-coluna. Será que estes vetores $\mathbf{X}_n$ estão se aproximando de um vetor $\mathbf{X}$ que seja solução do sistema? Verifiquemos isto. Naturalmente, o sistema pode ser resolvido de forma usual (por exemplo, por substituição) e a solução é

$$x = \frac{650788}{97541} \quad \text{e} \quad y = \frac{-6056}{947}$$

Efetuando as divisões, teremos $x \approx 6{,}6824849$ e $y \approx -5{,}8520276$. Compare esses resultados com os obtidos em $\mathbf{X}_4$.

Surge uma pergunta natural: em que condições teremos a repetição do que parece acontecer neste exemplo? Em outras palavras, quando a seqüência $\mathbf{X}_n$ se aproxima de um vetor $\mathbf{X}$, que é solução do sistema? O próximo teorema nos dará uma resposta a esta pergunta, fornecendo um método iterativo de resolução de sistemas lineares que satisfaça determinadas condições. Antes de enunciá-lo e demonstrá-lo, precisamos estudar a relação entre as formas $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{X} = \mathbf{MX} + \mathbf{N}$ de um sistema.

Normalmente, um sistema vem dado na forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Entretanto, se quisermos aplicar um procedimento semelhante ao usado no exemplo anterior, esta forma não é satisfatória. É preciso colocá-lo na forma $\mathbf{X} = \mathbf{MX} + \mathbf{N}$. Isto pode ser feito de várias maneiras. Uma delas é a que foi usada no exemplo:

$$\mathbf{AX} = [\mathbf{I} + (\mathbf{A} - \mathbf{I})]\mathbf{X} = \mathbf{X} + (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{B},$$

ou seja, $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} + \mathbf{B}$, e então tomamos $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ e $\mathbf{N} = \mathbf{B}$. O modo como são escolhidos $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ em função de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é importante na prática, e em 13.3.9 voltaremos a comentar este assunto. No momento, estamos apenas interessados na situação em que $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ já foram obtidos e então, começando com um vetor-coluna qualquer $\mathbf{X}_1$, montamos uma seqüência $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ iterativamente pela fórmula $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_n + \mathbf{N}$. Queremos saber, então, em que condições a seqüência obtida se aproxima de uma solução do sistema. Como já dissemos, a resposta é dada pelo teorema a seguir.

13.3.1 Teorema: Se um sistema linear é dado na forma $\mathbf{X} = \mathbf{MX} + \mathbf{N}$, onde $\mathbf{M}$ é uma matriz quadrada tal que todos os seus autovalores tenham módulo menor que 1, então, iniciando por um vetor-coluna qualquer $\mathbf{X}_1$, a seqüência de vetores-coluna obtida pela fórmula

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{MX}_n + \mathbf{N}$$

tem como limite um vetor-coluna $\mathbf{X}$ que é solução do sistema $\mathbf{X} = \mathbf{MX} + \mathbf{N}$. Dizemos, neste caso, que a seqüência converge para uma solução do sistema.

Prova: Temos

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{MX}_1 + \mathbf{N}$$
$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{MX}_2 + \mathbf{N} = \mathbf{M}(\mathbf{MX}_1 + \mathbf{N}) + \mathbf{N} = \mathbf{M}^2\mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} + \mathbf{M})\mathbf{N}$$
$$\mathbf{X}_4 = \mathbf{MX}_3 + \mathbf{N} = \mathbf{M}[\mathbf{M}^2\mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} + \mathbf{M})\mathbf{N}] + \mathbf{N} = \mathbf{M}^3\mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2)\mathbf{N}$$

e, procedendo por indução, obtemos

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \ldots + \mathbf{M}^{n-2})\mathbf{N}.$$

Como $\mathbf{M}$ tem todos os autovalores com módulo menor que 1, pelo corolário 13.2.5 e pelo teorema 13.2.4, temos

$$\lim_{n\to\infty} (I + M + \ldots + M^{n-2}) = (I - M)^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} M^{n-1} = 0.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} [M^{n-1}X_1 + (I + M + \ldots + M^{n-2})N] =$

$$= (I - M)^{-1}N.$$

Concluímos, então, que $\lim_{n\to\infty} X_n$ existe e chamemos

$$X = (I - M)^{-1}N = \lim_{n\to\infty} X_n.$$

Tomemos agora o limite quando $n \to \infty$ dos dois membros da igualdade $X_{n+1} = MX_n + N$. Temos $\lim_{n\to\infty} X_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (MX_n + N) = M \cdot \lim_{n\to\infty} X_n + N$, ou seja, $X = MX + N$ e, portanto, $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ é solução do sistema.

O teorema que acabamos de ver é típico dos teoremas que aparecem em processos iterativos. Ele fornece um processo de construção mecânica de uma seqüência que, sob certas condições, aproxima-se da solução do problema. Não é vantajoso aplicar manualmente estes processos, mas estes parecem bastante razoáveis quando se dispõe de uma calculadora automática programável.

Entretanto, este teorema apresenta uma limitação muito séria na prática. Como verificar concretamente se uma dada matriz (geralmente de ordem alta) tem autovalores com módulo menor que 1? Calcular os autovalores seria uma resposta óbvia, mas não temos meios práticos e rápidos de fazer isto com matrizes de ordem alta (a não ser, talvez, por outros processos numéricos iterativos). Vamos ver, então, se conseguimos dar uma resposta bem simples e rápida, apenas examinando os elementos da matriz. Para isto definimos:

13.3.2 Definição: Seja $A = [a_{ij}]_{r\times s}$ uma matriz. Chamamos de *norma da matriz* A e denotamos por $\|A\|$, o número não negativo

$$\|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant r} \sum_{j=1}^{s} |a_{ij}|$$

Exemplo: Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix},$$

então $\|A\| = \max\{|2| + |-1|, |8| + |0|\} = \max\{3, 8\} = 8$.

O caso particular da definição anterior em que a matriz é um vetor-coluna $n \times 1$ é muito importante e por isso vamos repetir a definição neste caso particular, dando um nome especial.

13.3.3 Definição: Seja

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

um vetor-coluna. Chamamos de *norma do máximo do vetor-coluna* X ao número

$$\|X\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

Observação: No Capítulo 8, ao lidarmos com espaços vetoriais munidos de um produto interno $\langle , \rangle$, demos o nome de norma de um vetor v ao número $\|v\| = \langle v, v\rangle$. A noção que estamos apresentando aqui não provém de um produto interno, mas continua recebendo o nome de norma porque possui várias propriedades em comum com o conceito introduzido no Capítulo 8. Vejamos algumas propriedades.

13.3.4 Teorema: Consideremos uma seqüência de matrizes $A_n = [a_{ij}^{(n)}]_{r\times s}$ e uma matriz $A = [a_{ij}]_{r\times s}$, tais que $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$. Então $\lim_{n\to\infty} (A_n - A) = 0$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Prova: Temos $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant r} \left(\sum_{j=1}^{s} |a_{ij}^{(n)} - a_{ij}| \right) = 0$

Então para todo $i = 1, \ldots, r$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{s} |a_{ij}^{(n)} - a_{ij}| = 0$$

Mas, se a soma de termos positivos tende a zero, cada uma das parcelas também tende a zero. Logo, para todo $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, s$ temos $\lim_{n\to\infty} |a_{ij}^{(n)} - a_{ij}| = 0$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} (a_{ij}^{(n)} - a_{ij}) = 0$. Assim, $\lim_{n\to\infty} (A_n - A) = 0$.

13.3.5 Teorema: Sejam A e B duas matrizes de mesma ordem e λ um número.

i) $\|A\| = 0$ se, e somente se $A = 0$
ii) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$
iii) $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$

Prova: Faça como exercício. Ao provar (*ii*) lembre que se a e b são números, então $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Biblioteca Ciência & T

Observe que as propriedades do teorema anterior são três das propriedades da norma definida no Capítulo 8. A norma definida aqui, embora não provenha de um produto interno, tem também essas propriedades.

Vamos precisar, ainda, de mais uma propriedade desta norma para demonstrar os resultados seguintes.

13.3.6 Teorema: Se $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{r\times s}$ e $\mathbf{B} = [b_{kj}]_{s\times t}$ são duas matrizes, então $\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\|$.

Prova: Temos $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = [c_{ij}]_{r\times t}$ onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$

Então
$$\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant r}\sum_{j=1}^{t}|c_{ij}| = \max_{1\leqslant i\leqslant r}\Big(\sum_{j=1}^{t}\Big|\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\Big|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant r}\Big[\sum_{j=1}^{t}\Big(\sum_{k=1}^{s}|a_{ik}|\,|b_{kj}|\Big)\Big] =$$

$$= \max_{1\leqslant i\leqslant r}\Big(\sum_{k=1}^{s}|a_{ik}|\sum_{j=1}^{t}|b_{kj}|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant r}\Big[\sum_{k=1}^{s}|a_{ik}|\,(\max_{1\leqslant k\leqslant s}\sum_{j=1}^{t}|b_{kj}|)\Big] =$$

$$= \Big(\max_{1\leqslant i\leqslant r}\sum_{k=1}^{s}|a_{ik}|\Big)\cdot\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant s}\sum_{j=1}^{t}|b_{kj}|\Big) =$$

$$= \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\|$$

Uma situação particular desta proposição é quando $\mathbf{B}$ é um vetor-coluna $\mathbf{X}$. Temos então $\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{X}\|$. Vamos ver agora qual é a ligação que existe entre a norma de uma matriz e seus autovalores.

13.3.7 Teorema: Se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada tal que $\|\mathbf{A}\| < 1$, então todos os seus autovalores têm módulo menor que 1.

Prova: Pelo teorema 13.3.6, temos $\|\mathbf{A}^2\| = \|\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|^2$ e, indutivamente, $\|\mathbf{A}^k\| \leqslant \|\mathbf{A}\|^k$. Como $\|\mathbf{A}\| < 1$, temos

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty}\|\mathbf{A}^k\| \leqslant \lim_{k\to\infty}\|\mathbf{A}\|^k = 0$$

ou seja, $\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{A}^k\| = 0$ e, portanto, pelo teorema 13.3.4 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$.

Usando, então, o teorema 13.2.3, vemos que os autovalores de $\mathbf{A}$ têm módulo menor que 1.

Incluindo este último resultado no teorema 13.3.1, obtemos o seguinte teorema que fornece um critério para determinar se um sistema tem solução obtida através do processo iterativo.

13.3.8 Teorema: Se $\mathbf{M} = [b_{ij}]_{r\times r}$ é uma matriz tal que $\|\mathbf{M}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant r}\sum_{j=1}^{r}|b_{ij}| < 1$ e $\mathbf{N}$ é um vetor-coluna $r\times 1$, então, qualquer que seja o vetor-coluna inicial $\mathbf{X}_1$, a seqüência de vetores-coluna, dada pela fórmula iterativa $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{X}_n + \mathbf{N}$, aproxima-se de um vetor-coluna $\mathbf{X}$ que é solução do sistema linear $\mathbf{X} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{N}$.

Como este último resultado pode ser usado na prática? Como já comentamos, um sistema que normalmente aparece na forma $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}$ sempre pode ser colocado (de vários modos) na forma $\mathbf{X} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{N}$. A resolução do teorema anterior pelo processo iterativo, é viável, desde que esteja satisfeita determinada condição sobre $\mathbf{M}$. Dependendo da maneira como colocamos o sistema na forma $\mathbf{X} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{N}$, esta condição (suficiente) sobre $\mathbf{M}$ vai se refletir de maneira diferente sobre $\mathbf{A}$.

Por exemplo, na escolha sugerida, isto é, $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ e $\mathbf{N} = \mathbf{B}$, se $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{r\times r}$, a condição $\|\mathbf{M}\| < 1$ é a de que $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\| = \max\{|1 - a_{i1}| + |a_{i2}| + \ldots + |a_{ir}|\} < 1$. Isto significa em termos intuitivos que para esta escolha de $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ o processo iterativo converge se a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ do sistema for razoavelmente próxima da identidade.

Para conseguirmos convergência em outras situações, precisamos fazer outras escolhas para $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$. Nos meios computacionais, estas outras escolhas para $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ são feitas seguindo o princípio enunciado abaixo.

13.3.9 Princípio: Dado o sistema $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}$, escrevemos $\mathbf{A} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$, onde $\mathbf{P}$ é uma matriz inversível. Então

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\mathbf{X} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{X} - \mathbf{Q}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

ou $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{B}$

ou ainda $\mathbf{X} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q})\mathbf{X} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$.

Então $\mathbf{M} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$ e $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$.

Este princípio pode ser ilustrado, desenvolvendo um processo que denominamos *Método de Jacobi.*

13.4 MÉTODO DE JACOBI

Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$ com $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, r$,

podemos escrever

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Como $a_{ii} \neq 0$, a matriz diagonal é inversível e sua inversa é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{rr} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & & 0 \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{rr}^{-1} \end{bmatrix}$$

Podemos tomar então em 13.3.9

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{rr} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1r} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{r1} & -a_{r2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Com esta escolha o processo iterativo obtido é chamado método de Jacobi. Neste caso

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dfrac{-a_{1r}}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \dfrac{-a_{2r}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{-a_{r1}}{a_{rr}} & \dfrac{-a_{r2}}{a_{rr}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

A condição $\|\mathbf{M}\| < 1$ para a convergência do processo iterativo é então que

$$\left|\frac{-a_{12}}{a_{11}}\right| + \dots + \left|\frac{-a_{1r}}{a_{11}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{-a_{21}}{a_{22}}\right| + \dots + \left|\frac{-a_{2r}}{a_{22}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{-a_{r1}}{a_{rr}}\right| + \dots + \left|\frac{-a_{r,r-1}}{a_{rr}}\right| < 1$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1r}| < |a_{11}| \\ &\vdots \\ &|a_{r1}| + |a_{r2}| + \dots + |a_{r,r-1}| < |a_{rr}| \end{aligned}$$

Em outras palavras, no Método de Jacobi, a condição de convergência do processo é a de que cada elemento da diagonal seja, em módulo, maior que a soma dos módulos dos elementos que estejam na mesma linha.

13.5 PROCESSO DE GAUSS-SEIDEL

Um outro processo muito usado na prática é o chamado processo de Gauss-Seidel. Considerando uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{r \times r}$ com diagonal sem zeros ($a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, r$), escrevemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

em seguida tomamos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ & 0 & \dots & a_{2r} \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Note que $\mathbf{P}$ é inversível, pois os elementos da diagonal são não nulos e ela é triangular inferior. Neste processo é um pouco mais difícil escrever $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$, mas você deve tentar. Como você poderá verificar também, a condição $\|\mathbf{M}\| < 1$ é

muito mais complicada de se expressar em termos da matriz A. Costuma-se, assim, trabalhar com uma outra condição suficiente (critério de Sassenfield).

Mas você pode verificar que a condição $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ para $i = 1, 2, ..., n$

estabelecida no método de Jacobi também é uma condição suficiente para a convergência no processo de Gauss-Seidel. Você encontrará a prova destes critérios, bem como um grande número de exemplos, na bibliografia citada no final do Capítulo.

O método de Gauss-Seidel costuma ser muito vantajoso nos casos onde a matriz é de ordem elevada e há poucos elementos diferentes de zero.

13.6 ESTIMATIVA DE ERRO

Dado um processo iterativo $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{X}_n + \mathbf{N}$ com $\|\mathbf{M}\| < 1$, sabemos que o processo converge, isto é, a seqüência $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ aproxima-se de um vetor-coluna $\mathbf{X}$ que é solução da equação $\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X} + \mathbf{N}$.

Resta, entretanto, um problema prático: uma vez que não conhecemos *a priori* a solução $\mathbf{X}$ (na verdade é isto que queremos achar) como saberemos quando os $\mathbf{X}_n$ estão suficientemente próximos de $\mathbf{X}$? Intuitivamente a resposta é: calculamos os termos $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{X}_{n+1}$, etc. e em cada passo comparamos o valor obtido com o anterior, isto é, $\mathbf{X}_{n+1}$ com $\mathbf{X}_n$. Quando $\mathbf{X}_{n+1}$ estiver próximo de $\mathbf{X}_n$ é porque *provavelmente* os termos não se alteram muito a cada passo e podemos dizer que $\mathbf{X}_{n+1}$ está próximo de $\mathbf{X}$.

Esta resposta intuitiva apresenta problemas sérios. Primeiro, o que significa exatamente a palavra *próximo*? Como podemos medir isso de forma que uma calculadora automática possa nos responder quando estamos "próximos"? Segundo, como podemos justificar a nossa intuição? Terceiro, na prática precisamos saber exatamente qual é o erro cometido ao pararmos o processo iterativo num determinado passo, e não apenas saber que estamos próximos.

Quanto ao primeiro problema, podemos solucioná-lo utilizando a noção de norma. Por exemplo, se

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ \vdots \\ x_r^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_{n+1} = \begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ \vdots \\ x_r^{(n+1)} \end{bmatrix}$$

então $\|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n\| = \text{máx } \{|x_1^{(n+1)} - x_1^{(n)}|, ..., |x_r^{(n+1)} - x_r^{(n)}|\}$ e, portanto,

se a norma da diferença de $\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n$ for pequena, os elementos correspondentes dos vetores-coluna estão próximos.

Os dois outros problemas serão resolvidos de uma forma conjunta. Queremos saber qual o erro cometido ao pararmos o processo iterativo num certo passo. Vamos calcular, então, $\|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}\|$, onde $\mathbf{X}$ é a solução do problema $\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X} + \mathbf{N}$. Para isto, sabemos que $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_n + \mathbf{N}$ e $\mathbf{X} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}$. Subtraindo termo a termo obtemos

$$\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_n - \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}$$

Subtraindo $\mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_{n+1}$, dos dois membros da última igualdade obtemos

$$\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_n - \mathbf{M} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_{n+1}$$

ou $\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_n - \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_{n+1}$

ou ainda $(\mathbf{I} - \mathbf{M})(\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}) = \mathbf{M}(\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n+1})$.

Com a hipótese $\|\mathbf{M}\| < 1$ (para o processo convergir), aplicando o mesmo raciocínio que em 13.2.5, vemos que $\mathbf{I} - \mathbf{M}$ é inversível e que

a) $(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + ...$

Então $\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n+1})$

Tomando as normas dos dois membros e lembrando 13.3.6, chegamos a

b) $\|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}\| \leqslant \|(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n+1}\|$

Usando 13.3.5 (*ii*) e 13.3.6 em (*a*), obtemos

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\| = \|\mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + ...\| \leqslant 1 + \|\mathbf{M}\| + \|\mathbf{M}\|^2 + ... = \frac{1}{1 - \|\mathbf{M}\|}$$

Colocando esta expressão em (*b*), temos o teorema seguinte.

13.6.1 Teorema: Consideremos o processo iterativo $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{X}_n + \mathbf{N}$ com $\|\mathbf{M}\| < 1$. Então a seqüência $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge para a solução $\mathbf{X}$ do problema $\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X} + \mathbf{N}$, de tal modo que

$$\|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}\| \leqslant \frac{\|\mathbf{M}\|}{1 - \|\mathbf{M}\|} \|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n\|$$

Assim, o teorema justifica o nosso procedimento intuitivo e nos dá um meio de calcular o erro cometido ao pararmos o processo em um determinado passo. Por exemplo, se quisermos achar $\mathbf{X}$ com uma precisão de ξ, deveremos, a partir de um $\mathbf{X}_0$ qualquer, seguir o processo iterativo até que

$$\|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}\| \leqslant \frac{\|\mathbf{M}\|}{1 - \|\mathbf{M}\|} \|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n\| < \xi,$$

isto é, até que a norma da diferença de um termo com o seguinte, $\|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n\|$, seja menor que $\frac{\xi(1 - \|\mathbf{M}\|)}{\|\mathbf{M}\|}$

13.7 EXERCÍCIOS

1. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0{,}1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

   a) Calcule $\|\mathbf{A}\|$.

   b) Ao resolvermos o sistema

   $$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

   podemos garantir que o processo iterativo dado por $\mathbf{X}_n = \mathbf{MX} + \mathbf{N}$ onde $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ e $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ converge para uma solução do sistema?

2. Se $\mathbf{M}$ é uma matriz quadrada tal que $\|\mathbf{M}\| < 1$, sabemos que seus autovalores têm módulo menor que 1. A recíproca é verdadeira? Isto é, se os autovalores têm módulo menor que 1, então necessariamente $\|\mathbf{M}\| < 1$?

3. O sistema linear

   $$\begin{cases} -5x + 2y + z = 2 \\ x + 7y + z = 2 \\ x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

   pode ser resolvido pelo Método de Jacobi? Se puder, calcule $\mathbf{X}_3$ a partir de $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. Resolva o sistema linear

   $$\begin{cases} 6x + 2y - 3z = 5 \\ -x + 8y + 3z = -10 \\ x + 4y + 12z = 12 \end{cases}$$

   pelo (*a*) Método de Jacobi (*b*) Método de Gauss-Seidel, a partir de $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, isto é, ache $\mathbf{X}_4$ e faça uma estimativa do erro $\|\mathbf{X}_4 - \mathbf{X}\|$, onde $\mathbf{X}$ é a solução correta do problema. O que você pode dizer sobre as velocidades de convergência dos dois métodos?

5. Prove o teorema 13.3.5.

13.7.1 Respostas

1. *a*) $\|\mathbf{A}\| = 9$

   b) Não podemos garantir pois $\|\mathbf{M}\| > 1$.

2. Não vale pois $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{22}{32} & \frac{6\sqrt{3}}{32} \\ \frac{6\sqrt{3}}{32} & \frac{10}{\sqrt{32}} \end{bmatrix}$ é uma matriz com $\|\mathbf{M}\| \cong 1{,}011875$ e no entanto seus autovalores são 0,875 e 0,125 aproximadamente.

3. Pode, pois o módulo de cada elemento da diagonal é maior que a soma dos módulos dos outros elementos que estão na mesma linha.

4. *a*)
   $$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} \frac{191}{96} \\ -\frac{101}{64} \\ \frac{21}{16} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{X}_4 - \mathbf{X}\| \leqslant 1{,}85$$

   b)
   $$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} \frac{2317}{1152} \\ -\frac{13829}{9216} \\ \frac{12281}{9216} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{X}_4 - \mathbf{X}\| \leqslant 0{,}151$$

   O processo de Gauss-Seidel converge mais rapidamente que o de Jacobi.

Leitura Sugeridas e Referências

[1] Barros, I. Q.; *Introdução ao Cálculo Numérico*; Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1972.

[2] Conte, S. D.; *Elementos de Análise Numérica*; McGraw-Hill, New York, 1972.

[3] Isaacson, E. e Keller, H.; *Analysis of Numerical Methods*; Wiley, New York, 1966.

[4] Protter, M. e Morrey, C.; *College Calculus with Analytic Geometry*; Addison – Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1965.

14

CONJUNTOS CONVEXOS E PROGRAMAÇÃO LINEAR

14.1 INTRODUÇÃO

Um problema de otimização envolve maximizar ou minimizar uma função restrita a certas condições. Estamos sempre interessados em minimizar custos, maximizar lucro, rendimento etc. A programação linear é uma técnica que permite a resolução destes problemas no caso específico em que as funções a serem analisadas são funções afins (lineares mais constante) e as restrições são dadas por desigualdades lineares (regiões poliedrais convexas).

Neste capítulo, introduziremos os conjuntos convexos e analisaremos os máximos e mínimos que as funções afins assumem nestes conjuntos, traduziremos problemas concretos para esta linguagem e procuraremos resolvê-los. Isto será feito de uma maneira mais conceitual e geométrica nas seções 14.2 e 14.3, e de uma maneira algorítmica e programável na seção 14.5, escrita pelo professor Antonio Carlos Moretti, que vem trabalhando em muitos problemas nesta área e que nos deu valiosas sugestões para esta nova versão.

Os resultados de conjuntos convexos e programação linear começaram a ser organizados no final do século passado e início deste século, a partir de trabalhos de matemáticos como H. Minkowski, A. Haar, H. Weyl. A partir dos anos 40 tivemos

um rápido desenvolvimento dessa área, principalmente no que se refere ao desenvolvimento de algoritmos que permitiram programar e resolver inúmeros problemas aplicados envolvendo muitas variáveis.

A grande difusão da programação linear nos últimos anos deve-se ao fato de que, embora ela trate de um problema específico, ela é uma técnica simples e muitos problemas do cotidiano podem ser formulados segundo esta linguagem.

14.2 CONJUNTOS CONVEXOS

As noções que introduziremos a seguir visam uma caracterização de regiões convexas especiais. O conceito de *variedade linear* de um espaço vetorial é algo que abrange seus subespaços e as translações destes.

14.2.1 Definição: Um subconjunto A de um espaço vetorial V é uma *variedade linear de* V se existe um subespaço W de V e um vetor $\mathbf{v}_0$ de V, tal que:

$$A = \{ \mathbf{v} \in V; \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} \text{ para } \mathbf{w} \in W \}$$

Usaremos a notação $A = \mathbf{v}_0 + W$ para indicar a variedade linear. Observe que se $\mathbf{v}_0 \neq 0$, então A não é um subespaço. Por dimensão de A, denotada $\dim A$, entendemos a dimensão de W.

14.2.2 Exemplos

Exemplo 1: Um exemplo de uma variedade linear de dimensão 1 no $\mathbf{R}^2$ é uma reta (que passe ou não pela origem), como indica a Figura 14.2.1.

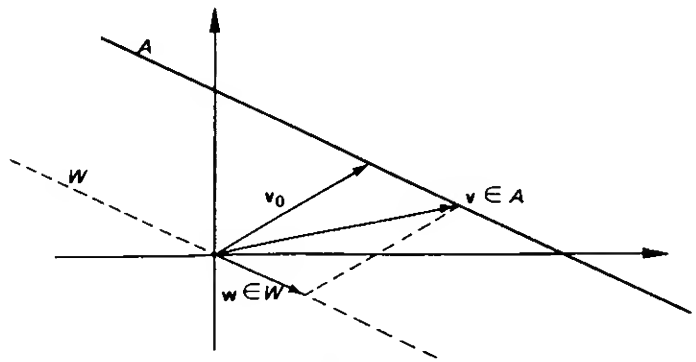


Figura 14.2.1

Biblioteca de Ciência & Tecnol
UFPe

Um ponto do plano é uma variedade linear de dimensão zero.

Exemplo 2: Todo subespaço é, em particular, uma variedade linear ($v_0 = 0$).

Exemplo 3: Como já vimos (Exemplo 9 de 4.3.2) o conjunto-solução de

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

não é um subespaço vetorial de $M(3, 1)$. Resolvendo o sistema vemos que os vetores-solução são da forma:

$$(*) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ para } \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

Note, ainda, que os vetores do tipo

$$\lambda \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

sendo solução do sistema homogêneo associado (Exercícios 20 e 22 da secção 2.6), formam um subespaço, W, de $M(3, 1)$, de dimensão 1. Portanto, o conjunto dos vetores-solução do nosso sistema, descrito em (*), é uma variedade linear de dimensão 1.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + W$$

Exemplo 4: De modo geral: se um sistema de equações lineares é compatível (isto é, admite solução) seu conjunto-solução é uma variedade linear de dimensão igual ao grau de liberdade do sistema. (Verifique isto! Compare com o Exercício 21 da secção 2.6.)

No caso particular do Exemplo 4 acima em que temos apenas uma equação linear, a variedade linear determinada por esta equação será chamada *hiperplano*.

Por exemplo, em $\mathbf{R}^3$ (observe que estamos identificando $M(3, 1)$ com $\mathbf{R}^3$), o hiperplano determinado pela equação $2x + 3y + 3z - 2 = 0$ é o plano

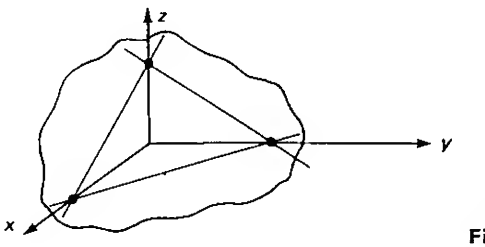


Figura 14.2.2

No caso de $\mathbf{R}^2$, um hiperplano é uma reta (faça um exemplo).

Um hiperplano divide o espaço vetorial em 2 semi-espaços. Por exemplo, ao considerarmos o hiperplano em $\mathbf{R}^3$ descrito por

$$2x + 3y + 3z - 2 = 0$$

teremos o espaço dividido em dois semi-espaços que são os pontos (x, y, z) que satisfazem $2x + 3y + 3z - 2 \geqslant 0$ ou $2x + 3y + 3z - 2 \leqslant 0$, respectivamente. Na figura

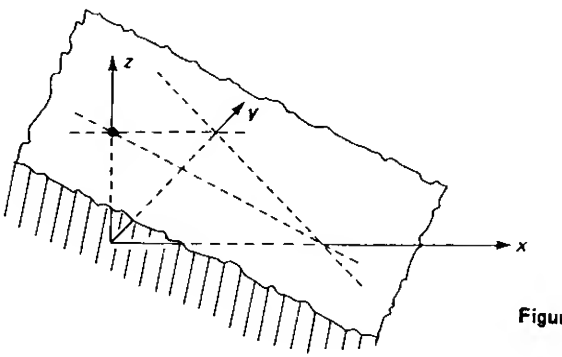


Figura 14.2.3

a região hachureada representa o semi-espaço $2x + 3y + 3z - 2 \leqslant 0$.

Se considerarmos, agora, o hiperplano $x + y - 1 = 0$ no $\mathbf{R}^2$ (que é uma reta no plano), qual é o semi-espaço descrito por $x + y - 1 \geqslant 0$? (Note que como aqui o espaço vetorial é o $\mathbf{R}^2$, o semi-espaço será dado geometricamente por um semi-plano). Para resolvermos este problema, uma vez traçado o hiperplano (no caso a reta) $x + y - 1 = 0$, escolhemos um ponto de $\mathbf{R}^2$, por exemplo a origem (0, 0) e verificamos se ele satisfaz ou não a desigualdade. Neste caso, como para $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = -1 < 0$, o ponto (0, 0) não está no semi-espaço procurado; este será aquele que não contém a origem.

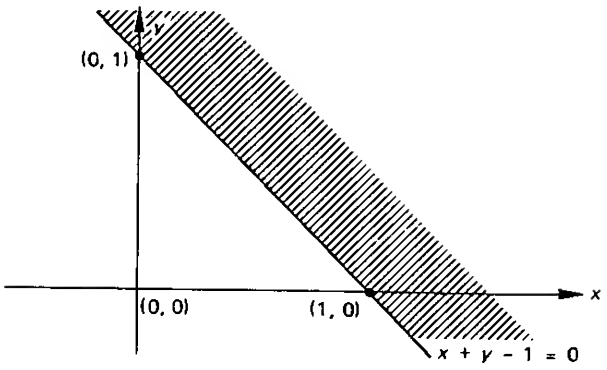


Figura 14.2.4

Usa-se, ainda, distinguir entre *semi-espaço fechado* (o que contém o hiperplano) e *semi-espaço aberto* (o que não contém o hiperplano). No último exemplo, o semi-espaço aberto, descrito por $x + y - 1 > 0$, será o semi-plano assinalado, excluindo-se a reta $x + y - 1 = 0$.

Para hiperplanos definidos por uma equação de mais do que três variáveis não teremos uma visão geométrica dos semi-espaços vetoriais como nos exemplos anteriores, mas estes conceitos são abordados da mesma maneira:

Hiperplano $\mathrm{H} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n ; a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$

é uma variedade afim de dimensão $n - 1$ que divide o $\mathbf{R}^n$ em dois *subespaços fechados*:

$$\mathrm{H}^+ = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n ; a_1x_1 + ... + a_nx_n \geqslant b \quad \text{e}$$

$$\mathrm{H}^- = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n ; a_1x_1 + ... + a_nx_n \leqslant b$$

14.2.3 Vamos agora apresentar um problema que nos guiará nos itens a seguir. Suponhamos que um agricultor queira adubar a sua plantação e disponha de dois tipos de adubo. O primeiro contém 3 g de fósforo, 1 g de nitrogênio e 8 g de potássio, e custa 10 u.c.p. por quilograma. O segundo tipo contém 2 g de fósforo, 3 g de nitrogênio e 2 g de potássio, e custa 8 u.c.p. por quilograma. Sabemos que um quilograma de adubo dá para 10 m² de terra, e que o solo em que estão suas plantações necessita de pelo menos 3 g de fósforo, 1,5 g de nitrogênio e 4 g de potássio a cada 10 m². Quanto o agricultor deve comprar de cada adubo, para cada 10 m² de terra, de modo a conseguir ter o mínimo custo?

	x	y	*Necessidades mínimas de adubo*
	Tipo A	*Tipo B*	
Fósforo	3	2	3
Nitrogênio	1	3	1,5
Potássio	8	2	4
	Custo 10 u.c.p.	Custo 8 u.c.p.	

Chamemos de x a quantidade em kg de adubo do primeiro tipo e y a do segundo tipo. Evidentemente, x e y não podem assumir qualquer valor, pois devemos ter $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ e, além disso, x kg do primeiro adubo fornece $3x$ g de fósforo, enquanto que y kg do segundo tipo fornece $2y$ g de fósforo. Então, se usarmos x kg do primeiro e y kg do segundo, estaremos adicionando $3x + 2y$ gramas e, pela exigência mínima do solo, devemos ter $3x + 2y \geqslant 3$. Analogamente, para o nitrogênio e o potássio deveremos ter $x + 3y \geqslant 1{,}5$ e $8x + 2y \geqslant 4$. Então os valores x e y devem satisfazer simultaneamente:

(§) $x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad 3x + 2y \geqslant 3, \quad x + 3y \geqslant 1{,}5, \quad 8x + 2y \geqslant 4.$

Colocando num gráfico as quantidades x (como abscissa) e y (como ordenada), como mostra a Figura 14.2.5 observamos que estas restrições nos conduzem a:

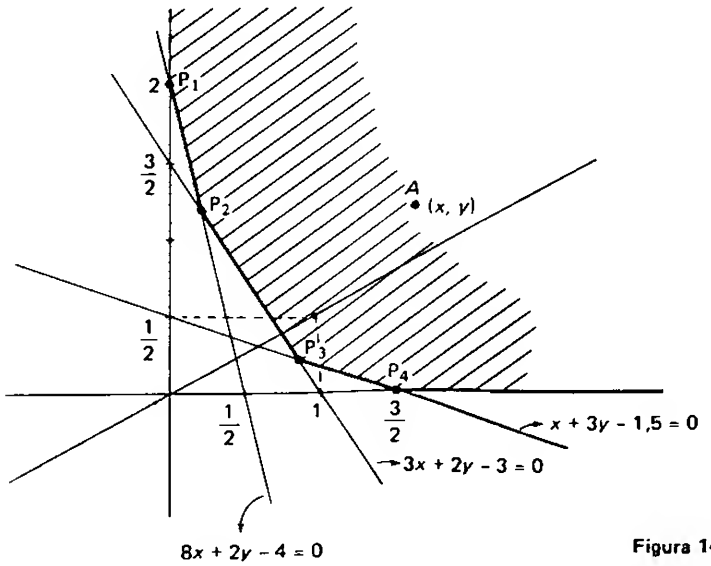


Figura 14.2.5

Biblioteca de Ciência & Tecnologia

Isto é, para que os valores x e y satisfaçam simultaneamente todas as desigualdades, o ponto (x, y) deve estar na região hachureada A. Note que esta região A é dada por uma intersecção de semi-espaços fechados do $\mathbf{R}^2$.

Além disso, queremos que o custo dado pela função

$$f(x, y) = 10x + 8y$$

seja mínimo, isto é, estamos procurando na região hachureada qual é o ponto (x, y) no qual $f(x, y)$ tem o menor valor.

Para resolver este problema devemos, então, estudar um pouco mais as propriedades dos conjuntos do tipo de A e das funções do tipo $f(x, y)$. Para isto precisamos das definições dadas a seguir.

14.2.4 Definição: Sejam A e B dois pontos do $\mathbf{R}^n$. O *segmento* de extremos A e B é o conjunto $\overline{AB}$ de pontos $\mathbf{R}^n$, dado por:

$$\overline{AB} = \{(1 - t)A + tB;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

Esta definição corresponde exatamente à nossa intuição de segmento em dimensão dois e três.

Observe que no segmento $\overline{AB}$ o ponto que corresponde a $t = 0$ é o ponto A, o ponto que corresponde a $t = 1$ é B e, a qualquer ponto P do segmento, existe $t_1 \in \mathbf{R}$ tal que $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$ e $P = (1 - t_1)A + t_1B$. Tomemos, por exemplo, $A = (1, 2)$ e $B = (3, -1)$ em $\mathbf{R}^2$. Dado o ponto $P = (\frac{7}{3}, 0)$ sobre o segmento, podemos escrever $(\frac{7}{3}, 0) = (1 - \frac{2}{3})(1, 2) + \frac{2}{3}(3, -1)$, ou seja, existe $t = \frac{2}{3}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, tal que $P = (1 - t)A + tB$. Por outro lado, se tomamos t_1, tal que $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$, por exemplo $t_1 = \frac{1}{2}$, e fazemos $P_1 = (1 - t_1)A + t_1B = (2, -1)$, verificamos facilmente que P_1 está sobre o segmento AB.

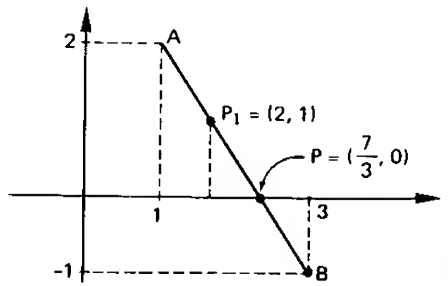


Figura 14.2.6

14.2.5 Definição: Um subconjunto S do $\mathbf{R}^n$ é chamado *convexo* se para quaisquer dois pontos A e B de S o segmento AB está inteiramente contido em S.

Exemplo

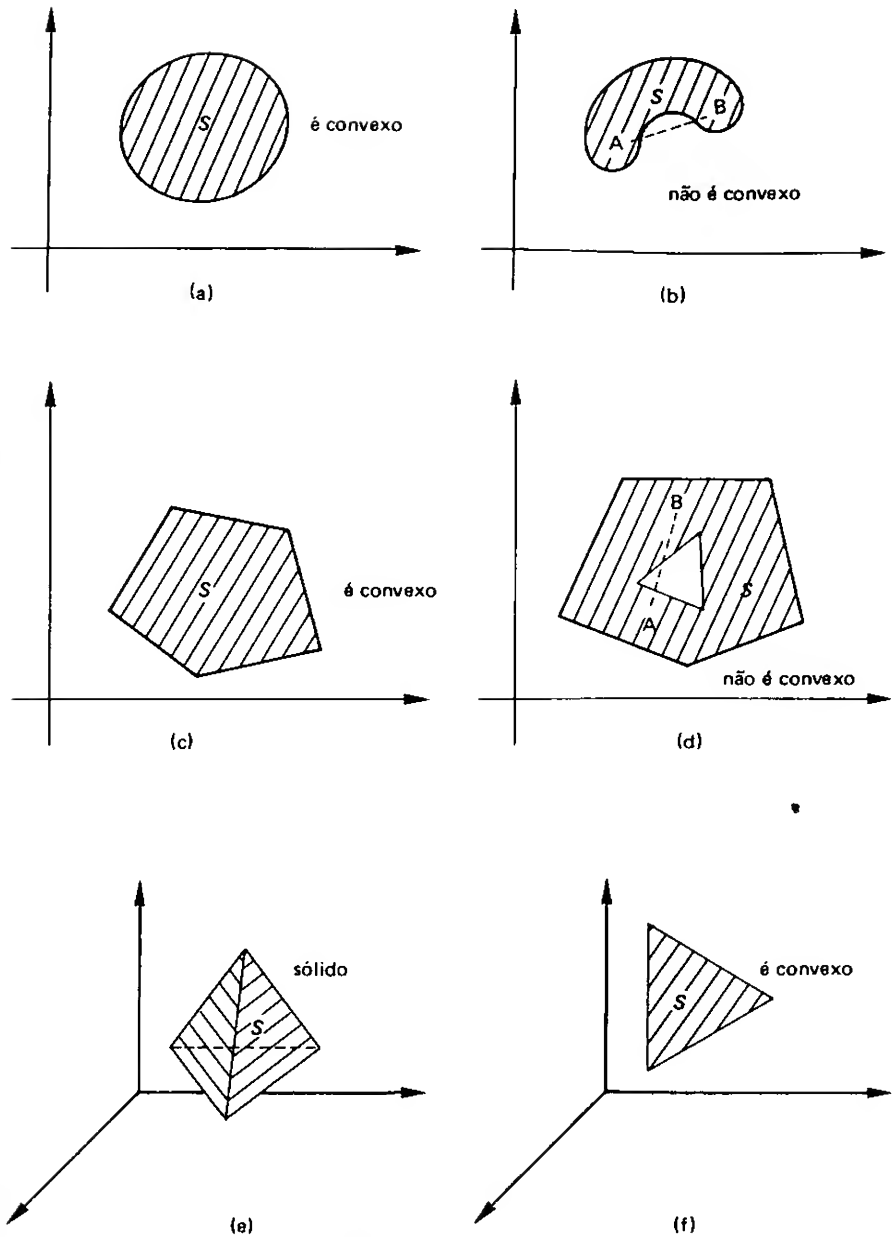


Figura 14.2.7

14.2.6 Teorema: Um semi-espaço fechado é convexo.

Prova: Mostremos isso no caso de $\mathbf{R}^2$. (O caso geral é feito, usando o mesmo argumento.) No caso de $\mathbf{R}^2$, um semi-espaço fechado é constituído por pontos (x, y), que satisfazem uma expressão do tipo $ax + by + c \leqslant 0$.
Precisamos mostrar que se tomarmos dois pontos quaisquer do semi-espaço, o segmento que une estes pontos está contido no semi-espaço. Sejam $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$ dois pontos quaisquer do semi-espaço, e seja P um ponto qualquer de AB. Existe, então, $t_1 \in \mathbf{R}$, com $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$, tal que

$$P = (1 - t_1)(x_0, y_0) + t_1(x_1, y_1)$$
$$((1 - t_1)x_0 + t_1x_1,\ (1 - t_1)y_0 + t_1y_1)$$

e temos que verificar se:

$$(*)\quad a[(1 - t_1)x_0 + t_1x_1] + b[(1 - t_1)y_0 + t_1y_1] + c \leqslant 0,$$

que é a condição para P estar no semi-espaço. Mas

$$a[(1 - t_1)x_0 + t_1x_1] + b[(1 - t_1)y_0 + t_1y_1] + c =$$
$$= (1 - t_1)ax_0 + t_1ax_1 + (1 - t_1)by_0 + t_1by_1 + (1 - t_1)c + t_1c$$
$$= (1 - t_1)[ax_0 + by_0 + c] + t_1[ax_1 + by_1 + c],$$

e como $ax_0 + by_0 + c \leqslant 0$ e $ax_1 + by_1 + c \leqslant 0$ (pois A e B estão no semi-espaço) e $1 - t_1 \geqslant 0$ e $t_1 \geqslant 0$ (pois $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$), a relação $(*)$ é satisfeita. Assim, como P está no semi-espaço e P era um ponto arbitrário de $\overline{AB}$, então o segmento $\overline{AB}$ está inteiramente contido no semi-espaço e, portanto, este é convexo.

14.2.7 Teorema: A intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Prova: Sejam S_1 e S_2 dois conjuntos convexos. Precisamos mostrar que se A e B são dois pontos quaisquer de $S_1 \cap S_2$, então $\overline{AB} \subset S_1 \cap S_2$.
Mas se $A, B \in S_1 \cap S_2$, então $A, B \in S_1$ e como S_1 é convexo, $\overline{AB} \in S_1$.
Analogamente, se $A, B \in S_1 \cap S_2$, então $A, B \in S_2$ e como S_2 é convexo, $\overline{AB} \in S_2$. Como $\overline{AB}$ está contido simultaneamente em S_1 e S_2, então $\overline{AB} \in S_1 \cap S_2$. Portanto $S_1 \cap S_2$ é convexo.

14.2.8 Definição: Uma *região poliedral convexa fechada* em $\mathbf{R}^n$ é uma intersecção de uma quantidade finita de semi-espaços fechados do $\mathbf{R}^n$.

Devido aos dois teoremas anteriores, uma região poliedral convexa é um conjunto convexo.

14.2.9 Um conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ é dito *limitado* se existirem constantes $k_i, i = 1, \ldots, n$ tais que, se $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ então $x_i \leqslant k_i$, $i = 1, \ldots, n$.

14.2.10 Exemplos

Exemplo 1:

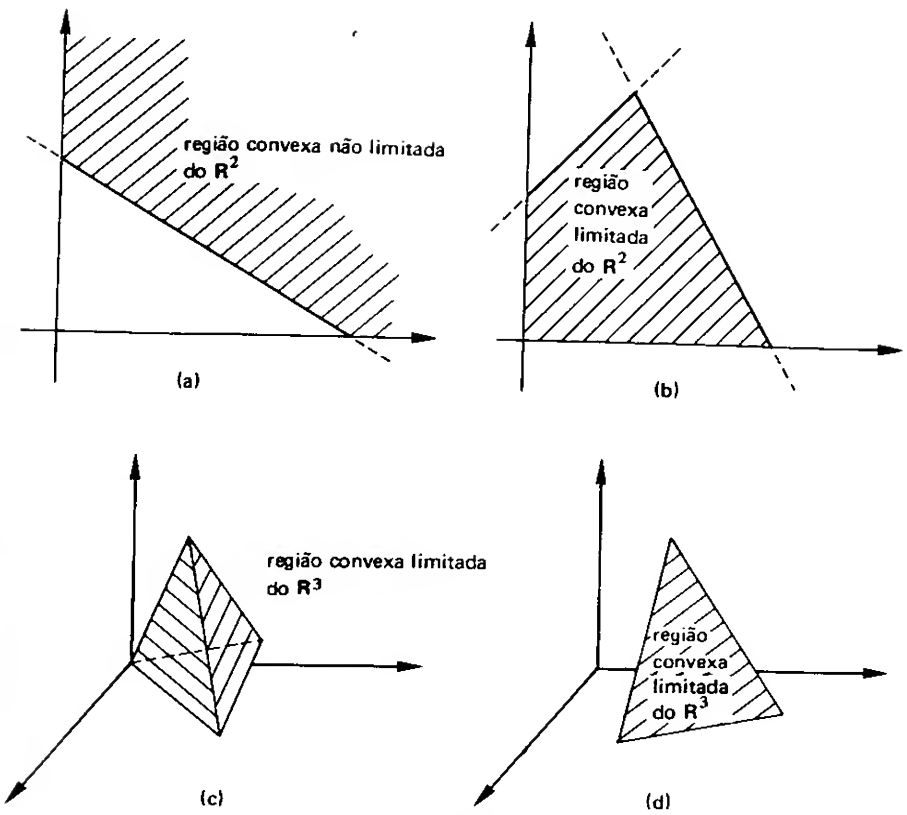


Figura 14.2.8

Note que da maneira como foi definida uma região poliedral convexa fechada é sempre obtida por um sistema de desigualdades lineares (uma desigualdade para cada semi-espaço). Como exemplo veja (§) de 14.2.3 e Figura 14.2.5.

Numa região poliedral convexa, procuramos pontos especiais – os *vértices*. Na região poliedral convexa do exemplo 14.2.3, eles são os pontos

$P_1 = (0, 2), P_2 = (\frac{1}{5}, \frac{6}{5}), P_3 = (\frac{6}{7}, \frac{3}{14})$ e $P_4 = (\frac{3}{2}, 0)$. Note que estes pontos são dados por intersecção de duas das retas que definem os semi-espaços. Assim, por exemplo, P_2 é dado pela solução do sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 8x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

Note, porém, que o ponto $(0, \frac{3}{2})$ que é solução do sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

não pertence à região A.

Este comentário nos leva a:

14.2.11 Definição: Dada uma região poliedral convexa fechada do $\mathbf{R}^n$ (determinada por um sistema de inequações lineares), os *vértices* dessa região são os pontos da região que satisfazem um dos possíveis sistemas de n equações lineares independentes, obtidas substituindo-se as desigualdades por igualdades.

Observação: Depois de resolver um sistema, a fim de verificar se o ponto está na região, testamos para ver se ele satisfaz todas as desigualdades.

14.2.12 Caracterização Geométrica dos Vértices: Os vértices que aqui foram definidos "algebricamente" são os *pontos extremos* da região poliedral convexa **R**. Com isto queremos dizer que eles são os pontos da região que não estão contidos no "interior" de nenhum segmento contido na região. Mais formalmente: "P é vértice de **R** se, e somente se, P está num segmento AB contido em **R** então P = A ou P = B". Prove este fato! *Sugestão:* Se $P \in \mathbf{R}^n$ satisfaz uma igualdade $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0$ (hiperplano), então $p + v$ e $p - v$ satisfazem a desigualdade correspondente se, e somente se, v satisfaz a igualdade $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ (lembre-se depois disto que a única solução de um sistema homogêneo de n-equações LI é o vetor nulo).

14.2.13 *Exemplo 1*: A região A do problema 14.2.3 é descrita pelas desigualdades

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 3x + 2y \geqslant 3 \\ x + 3y \geqslant 1{,}5 \\ 8x + 2y \geqslant 4 \end{cases}$$

Ao substituirmos por igualdades e tomarmos os sistemas de duas equações obtemos $10 = (\frac{5}{2})$. Dentre estes, determinaremos os vértices, verificando quais satisfazem o sistema de inequações que definem a região A. Neste caso, teremos apenas os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 nestas condições. Verifique!

Exemplo 2: Consideremos a região poliedral convexa fechada de $\mathbf{R}^3$, dada pelo sistema de inequações lineares

$$\begin{cases} x + y + z \leqslant 3 \\ y - z \leqslant 2 \\ x - 2y \leqslant 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Então os possíveis vértices são dados pelos sistemas de três equações

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow (3, 1, -1) \text{ (está na região, pois satisfaz todas as inequações)}$$

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - 2y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{-5}{2}) \text{ (está na região)}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, \tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}) \text{ (está na região)}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{1}{2}) \text{ (está na região)}$$

E a região é

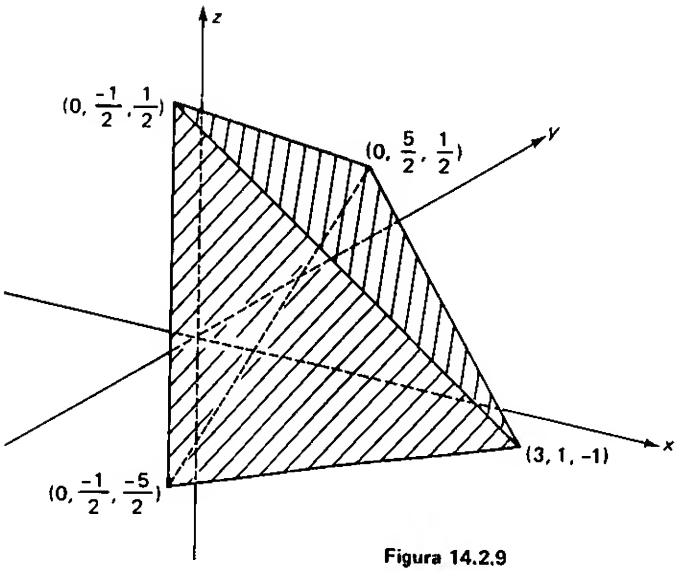


Figura 14.2.9

Agora, estamos em condições de caracterizar problemas como o introduzido em 14.2.3 e que podem ser resolvidos pela técnica específica que é a programação linear.

14.3 INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

A programação linear trata do problema específico de:

Maximizar ou minimizar uma função do tipo

$$f(x_1, ..., x_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n + b,$$

restrita a um subconjunto A poliedral convexo de $\mathbf{R}^n$.

(Note que $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ é uma transformação afim, isto é, $f(x) = L(x) + b$ onde L é uma transformação linear, $b \in \mathbf{R}$.)

Na linguagem de programação linear (PL), f é chamada *função objetivo* (f.o.) e A é denominada *região factível.*

No exemplo da seção 14.2.3, f.o. é dada por $f(x, y) = 10x + 8y$ e a região factível é a região A descrita por:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 3x + 2y \geqslant 3 \\ x + 3y \geqslant 1{,}5 \\ 8x + 2y \geqslant 4 \end{cases}$$

Nosso problema é minimizar f restrita a A.

14.3.1 Método Geométrico

Vamos (finalmente!) resolver o problema proposto em 14.2.3. O procedimento que vamos seguir é conhecido como método geométrico de resolução em PL.

Vamos reescrever a f.o. acima, utilizando produto interno do $\mathbf{R}^2$.

$f(x, y) = \langle (10, 8), (x, y) \rangle$, $\mathbf{c} = (10, 8)$ é denominado vetor gradiente e $\mathbf{x} = (x, y)$.

Observação 1: f é constante nas retas perpendiculares ao vetor $\mathbf{c} = (10, 8)$.

De fato:

Uma reta perpendicular a $\bar{\mathbf{c}}$ pode ser escrita na forma paramétrica do seguinte modo:

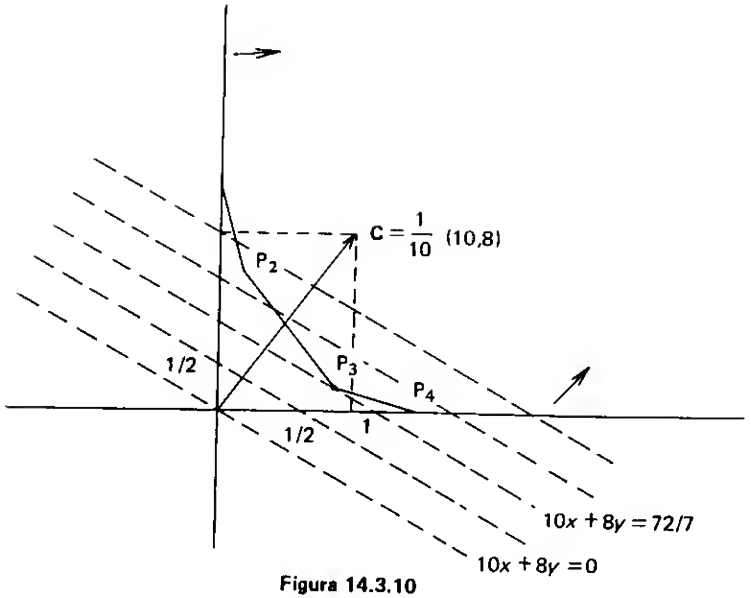


Figura 14.3.10

$$(x, y) = (x^*, y^*) + \lambda (-8, 10)$$

ou seja $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \lambda \mathbf{c}^{\perp}$

onde $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ é o vetor deslocamento, que podemos tomar na direção de $\mathbf{c}$.

Portanto, $f(x, y) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* + \lambda \mathbf{c}^{\perp} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \|\mathbf{c}\| \cdot \|\mathbf{x}^*\| \cos \alpha$ e, neste caso, $\cos \alpha = 1$.

Observação 2: Da observação 1 você pode notar que f será tão menor quanto menor for o deslocamento $\mathbf{x}^*$, ou seja, $f(x, y)$ assume seu mínimo no ponto (ou pontos) da região factível que estiver na reta perpendicular a $\mathbf{c}$, mais próximo da origem. Em nosso problema, o ponto é $(\frac{6}{7}, \frac{3}{14}) = P_3$ que é um vértice da região factível.

14.3.2 *Exemplo*: Uma fábrica produz dois tipos de geradores, tipo A e tipo B, e cada um deles deve passar por duas máquinas, C e D. Para fazer um gerador do tipo A, a máquina C deve trabalhar 2 horas e a máquina D deve trabalhar 4 horas. Para fazer uma unidade do tipo B, as máquinas C e D devem trabalhar respectivamente, 4 e 2 horas. As máquinas podem trabalhar 24 horas por dia. Sabe-se que a fábrica tem um lucro de 3.000 u.c.p. por um gerador do tipo A e um lucro de 5.000 u.c.p. por um do tipo B. Além disso, ela vende toda a sua produção. Sendo assim perguntamos: quantos geradores de cada tipo a fábrica deve produzir, para que seu lucro seja máximo?

Chamemos x a quantidade do tipo A e y a do tipo B, e observemos as restrições sobre x e y. Se são fabricados x geradores do tipo A, o tempo gasto pela máquina C é $2x$, e se são fabricados y geradores do tipo B, o tempo gasto pela máquina C é $4y$, ou seja, o tempo total usado pela máquina C é $2x + 4y$, que deve ser menor que 24 horas. Analogamente, temos uma restrição para a máquina D. Devemos ter, então:

$$\begin{aligned} x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \\ 2x + 4y &\leqslant 24 \\ 4x + 2y &\leqslant 24 \end{aligned}$$

que nos fornece a região mostrada na Figura 14.3.11, cujos vértices são (0, 0), (6, 0), (4, 4) e (0, 6). A função que queremos maximizar é a função lucro.

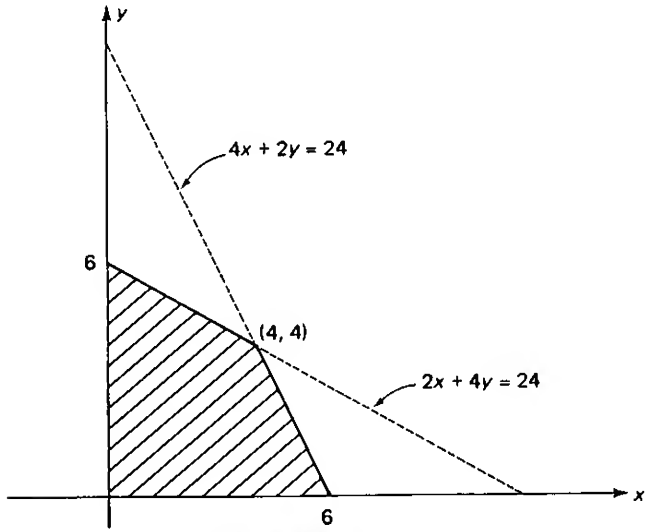


Figura 14.3.11

$$f(x, y) = 3\,000x + 5000y$$

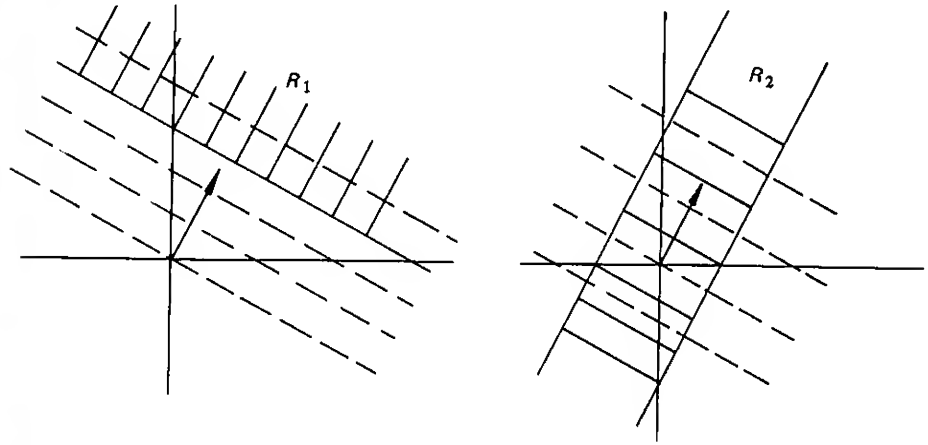
Use o método geométrico descrito no exemplo anterior para determinar o máximo de f, observando que, para obter o máximo, você deve "caminhar" na região por retas perpendiculares ao vetor gradiente da f.o. e no mesmo sentido dele.

14.3.3 Tipos de Solução

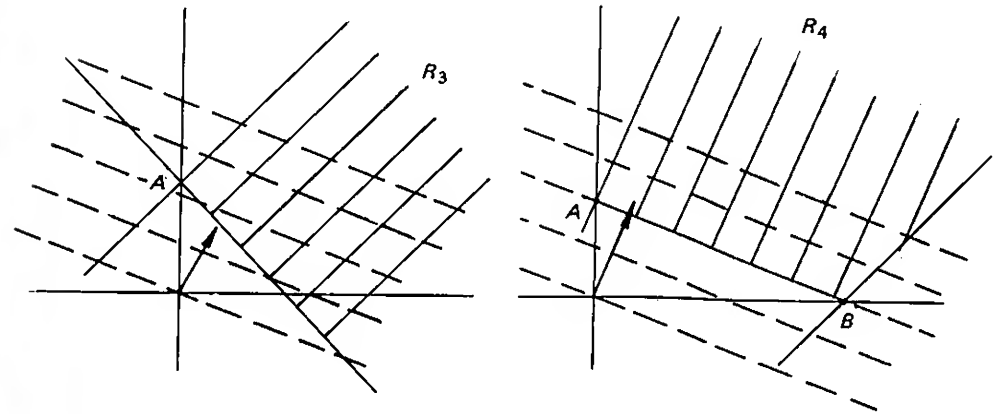
Baseado no método geométrico que descrevemos na seção anterior, já se pode intuir vários tipos de solução de problemas de programação linear de duas variáveis.

Vamos considerar todos os tipos possíveis de regiões poliedrais convexas no $\mathbf{R}^2$ e pesquisar os máximos e mínimos de uma função $f(x, y) = ax + by + c$. Na Figura 14.3.12 tomamos $a = 1$ e $b = 2$.

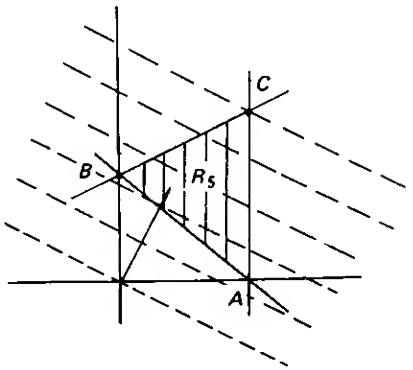
(a) Regiões ilimitadas sem vértices



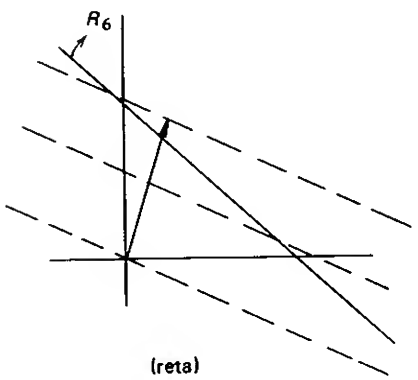
(b) Regiões ilimitadas com vértices



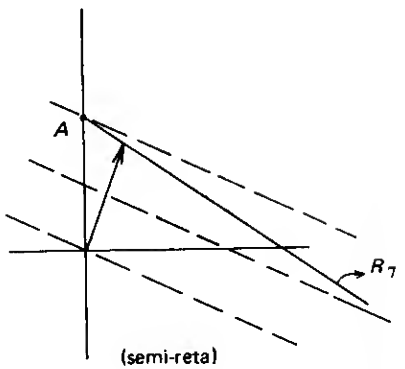
(c) Região limitada (portanto, com pelo menos três vértices)



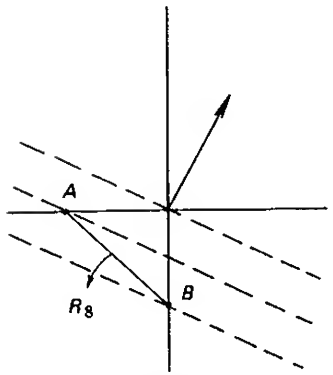
(d) Casos degenerados



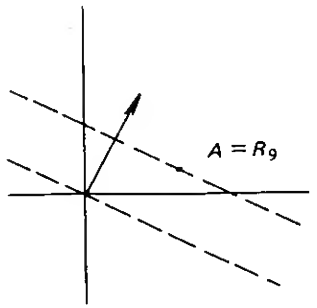
(reta)



(semi-reta)



(segmento)



(ponto)

Figura 14.3.12

Podemos observar portanto que a função

$$f(x, y) = x + 2y + c \quad \text{na região}$$

R_1 assume mínimo em toda reta ("fronteira" de R_1) e não assume máximo.
R_2 não assume máximo nem mínimo.
R_3 não assume máximo nem mínimo.
R_4 assume mínimo nos vértices A e B, portanto assume mínimo em todo segmento AB, e não assume máximo.
R_5 assume mínimo no vértice A e máximo no vértice C.
R_6 não assume máximo nem mínimo.
R_7 assume máximo no vértice A e não assume mínimo.
R_8 assume mínimo no vértice B e máximo no vértice A.
R_9 tem o valor máximo igual ao valor mínimo e igual a $f(A)$.

Exercício: a) Descreva, através de inequações, as regiões $R_1, R_2, ..., R_9$ acima.

b) Faça um estudo semelhante ao que foi feito acima para determinar os máximos e mínimos de $f(x, y) = -2x + y + c$ nas regiões $R_1, R_2, ..., R_9$.

14.3.4 Resolução do Problema para n-variáveis

Podemos estender o método geométrico descrito no Exemplo 14.3.1 para problemas de PL em geral. Teremos então para $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ o vetor gradiente $\mathbf{c} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$. Em termos de produto interno temos $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle + b$, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$. A função objetivo será, portanto, constante nos hiperplanos perpendiculares a $\mathbf{c}$. (Para as noções de perpendicularismo e co-seno do ângulo entre vetores do $\mathbf{R}^n$, consulte, se necessário, o Capítulo 8.)

No caso de problema envolvendo três variáveis ainda é possível visualizar geometricamente. Os pontos de mínimo ou máximo da f.o. serão procurados varrendo-se a região factível por planos perpendiculares ao vetor gradiente $\mathbf{c} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$.

Exercício: Para fixar melhor este procedimento, considere a função $f(x, y, z) = 4 - x - 2y + z$. Determine o valor máximo e o valor mínimo que f assume na região descrita no Exemplo 2 de 14.2.13. Observe os pontos onde isto ocorre.

Fica difícil, trabalhar na prática com este procedimento geométrico para quatro ou mais variáveis. Mas esta noção de procurar máximos e mínimos da função objetivo por uma varredura de hiperplanos perpendiculares ao gradiente nos permite intuir dois fatos cruciais na programação linear.

i) A função objetivo assume necessariamente um valor máximo e um valor mínimo quando a região poliedral convexa (factível) for limitada.

ii) Os vértices desempenham um papel fundamental na procura de máximos e mínimos para a função objetivo.

Volte aos exemplos anteriores de PL, tente observar o porquê deste fato. Na próxima seção vamos formalizar esta última observação, estabelecendo o resultado que é fundamental na resolução de problemas de PL.

14.3.5 Teorema Fundamental da Programação Linear

O primeiro resultado nos diz que os valores extremos de uma função afim são assumidos nos pontos extremos dos segmentos.

Lema 1: Seja $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$ e seja P um ponto interior a um segmento $\overline{AB}$ do $\mathbf{R}^n$, isto é, $P = \lambda A + (1 - \lambda) B, 0 < \lambda < 1$.
Então teremos $f(A) \leqslant f(P) \leqslant f(B)$ ou $f(B) \leqslant f(P) \leqslant f(A)$.

Prova: Como $P = \lambda A + (1 - \lambda) B$ e f é uma transformação afim,

$f(x) = L(x) + b$, onde $L(x) = L(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ é linear,
$f(P) = L(P) + b = L(\lambda A + (1 - \lambda) B) + b = \lambda L(A) + (1 - \lambda) L(B) + b$.

Suponha $f(A) \leqslant f(B) \Rightarrow L(A) \leqslant L(B)$
Como $f(P) = \lambda L(A) + (1 - \lambda) L(B) + b$ temos
$\lambda L(A) + (1 - \lambda) L(A) + b \leqslant f(P) \leqslant \lambda L(B) + (1 - \lambda) L(B) + b$.

$$L(A) + b \leqslant f(P) \leqslant L(B) + b$$

Portanto:

$$f(A) \leqslant f(P) \leqslant f(B)$$

Da mesma forma, se tivermos $f(B) \leqslant f(A)$ mostramos que $f(B) \leqslant f(P) \leqslant f(A)$.

Uma conseqüência deste resultado é o lema a seguir, que você poderá provar como exercício.

Lema 2: Seja $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$. Se dentre os valores que f assumir num segmento $\overline{AB}$ do $\mathbf{R}^n$, o valor máximo (mínimo) for assumido num ponto P interior deste segmento, então f será constante em $\overline{AB}$.

Analisando os enunciados dos lemas 1 e 2 e a natureza de uma região poliedral convexa, estamos em condição de enunciar o principal resultado da PL.

Teorema Fundamental da Programação Linear

Seja $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ definida numa região poliedral convexa A do $\mathbf{R}^n$. Suponha que f assuma um valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se A possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.

Prova: (Para regiões A do $\mathbf{R}^2$.) Suponhamos que o valor máximo (mínimo) de f seja assumido num ponto P de A.

Considerando todas as regiões poliedrais convexas possíveis do $\mathbf{R}^2$ (veja 14.3.3), podemos ter:

i) *P é um vértice.* (Neste caso o teorema já estará provado.)

ii) *P está numa aresta.* Do lema 2, f assumira este valor máximo (mínimo) em toda aresta. Como a região A possui vértice(s) esta aresta conterá um vértice v obrigatoriamente. (Por quê?) Portanto, $f(P) = f(v)$.

iii) *P está no interior de A.* Neste caso, f será constante em toda região A. De fato:

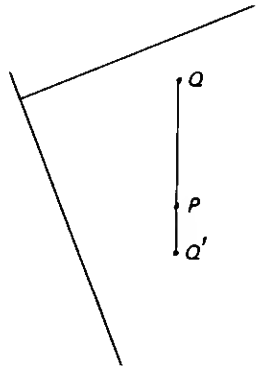


Figura 14.4.12

Seja Q um outro ponto interior de A. Como A é poliedral convexa, o segmento QP está contido em A; além disso, como P é interior, podemos considerar um prolongamento Q Q deste ainda contido em A. Do lema 2 segue que f é constante em QQ' e, portanto, $f(P) = f(Q)$.

Observação 1: A prova deste teorema para n-variáveis vai envolver um número maior de possibilidades: o ponto inicial de máximo (mínimo) poderá estar

i) num vértice;

ii) numa aresta (solução de $(n - 1)$ - equações). Neste caso, o máximo (mínimo) será assumido em toda a aresta que é um subconjunto de dimensão 1;

Biblioteca de
Ciência & Tecno
UFRG

iii) numa face (solução de $(n-2)$ - equações). Neste caso, o máximo (mínimo será assumido em toda a face que é um subconjunto de dimensão 2;

.
.
.

ni) num ponto interior da região A (que tem dimensão n). Neste caso, a função será constante em toda região.

Pode-se mostrar que em todos estes casos, quando a região tem vértices, conseguimos um vértice v onde a função assume seu máximo (mínimo), $f(v) = f(P)$.

Observação 2: É este teorema que permite, nos casos em que, pela natureza da função, já sabemos que ela assume máximo (mínimo) encontrá-lo apenas determinando seus valores nos vértices da região poliedral convexa.

Exemplo: No problema proposto na seção 14.2.3, temos

$$f(x, y) = 10x + 8y \geqslant 0 \text{ pois } x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0.$$

f é, portanto, limitada inferiormente, o que nos permite concluir que ela assumirá um mínimo na região que é fechada. Para encontrá-lo, bastará portanto calcular o valor da função nos vértices da região.

Regiões Limitadas

Uma situação onde, para qualquer função objetivo, temos necessariamente máximo e mínimo acontece quando a região A for limitada. Para mostrar este fato, você deve voltar para a solução geométrica dos problemas de PL (14.3). Note que, ao varrermos o $\mathbf{R}^n$ por hiperplanos perpendiculares ao vetor gradiente da f.o., sempre tocaremos a região A uma primeira e uma última vez. Além disto, uma região poliedral convexa limitada claramente possui vértices (por quê?). Isto nos permite reescrever o teorema fundamental PL para este caso.

Teorema: Seja $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ definida numa região poliedral convexa limitada A. Então f assume seus valores máximo e mínimo nos vértices de A.

Algoritmos para Resolver Problemas de PL

Vimos nesta seção que grande parte dos problemas de programação linear se resolve analisando-se apenas os valores da função objetivo nos vértices da região factível. Tanto a determinação dos vértices (resolução de sistemas lineares) quanto o cálculo da f.o. nestes são possíveis de algoritmos e de programação para calculadoras, microcomputadores e computadores. Na próxima seção introduziremos um destes métodos, conhecido por *método simplex*.

Programação Linear Inteira

Muitos problemas práticos podem ser formulados como maximizar ou minimizar uma função do tipo $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ numa região poliedral convexa, *com a restrição adicional que as variáveis são inteiros.* Este é o caso por exemplo do problema proposto em 14.3.2.

Na resolução de um problema de PL, nem sempre o máximo ou mínimo ocorrem em pontos cujas coordenadas são números inteiros, condição indispensável na formulação de certos problemas. Existem técnicas para se determinar soluções inteiras ótimas (máximo ou mínimo), isto é, soluções mais próximas dos vértices de máximo ou mínimo. Em alguns problemas você poderá fazer isto intuitivamente, veja Exercício 16 de 14.4. No caso geral, estes problemas são tratados na subárea de PL denominada *Programação Linear Inteira* (veja referências ao final do capítulo)

* 14.4 EXERCÍCIOS

1. Na definição de variedade linear em 14.2.1 prove que $\mathbf{v}_0 \in A$. O vetor $\mathbf{v}_0$ é único? W é único? Interprete geometricamente.

2. Desenhe a região em $\mathbf{R}^2$, definida pelas desigualdades

$$\begin{cases} 2x + y + 9 \geqslant 0 \\ -x + 3y + 6 \geqslant 0 \\ x + 2y - 3 \leqslant 0 \end{cases}$$

   Quais são seus vértices?

3. Desenhe a região definida em $\mathbf{R}^3$, pelas desigualdades anteriores.

4. Quais são os vértices da região poliedral convexa em $\mathbf{R}^2$, definida por

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 2x + 3y \leqslant 2 \\ 3x + 2y \leqslant 2 \\ x + y \leqslant 1 \end{cases}$$

   Desenhe esta região.

5. Se duas regiões poliedrais convexas são definidas por dois conjuntos de desigualdades lineares, a intersecção destas regiões é definida por qual conjunto de desigualdades?

6. A união de dois conjuntos convexos é convexa?

7. Sejam A = (1, 2, 3) e B = (0, 1, -1) dois pontos de $\mathbf{R}^3$. O ponto (0, 0, 0) está sobre o segmento $\overline{AB}$?

8. Uma região poliedral convexa fechada de $\mathbf{R}^2$ tem vértices (-2, 0), (3, 4), (1, 0) e (-1, -1). Ache um conjunto de desigualdades que defina esta região.

9. Ache os pontos de máximo e os pontos de mínimo da função $f(x, y) = 7x + 5y + 2$ definida na região determinada pelas desigualdades

$$\begin{cases} 2x + y + 9 \geqslant 0 \\ -x + 2y + 6 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ x + y - 4 \leqslant 0 \end{cases}$$

10. Uma máquina produz dois tipos A e B de frascos de vidro, mas não simultaneamente. Ao produzir um frasco do tipo A ela gasta 0,2 horas, e ao produzir um tipo B, gasta 0,4 horas. Sabendo que a máquina pode trabalhar no máximo 16 horas por dia e que o fabricante tem um lucro de 2 u.c.p. com um frasco tipo A e 3 u.c.p. com um frasco tipo B, quantos frascos de cada tipo devem ser produzidos para que o lucro seja máximo?

11. Uma companhia de transportes dispõe de 4 caminhões com capacidade para transportar 5.000 kg, 4 caminhões de 10.000 kg de capacidade e 2 caminhões de 20.000 kg de capacidade. O custo por hora dos caminhões do primeiro tipo é 200 u.c.p., do segundo 300 u.c.p. e do terceiro 400 u.c.p. Como devem ser usados os caminhões para transportar uma carga de 80.000 kg, para que o custo seja mínimo?

12. Uma indústria produz porcas, parafusos e pregos, podendo usar dois métodos distintos (mas não simultaneamente) para produzi-los. O primeiro método produz 3.000 porcas, 2.000 parafusos e 2.500 pregos por hora, enquanto o segundo produz 4.000 parafusos e 4.000 pregos por hora, mas nenhuma porca. A indústria trabalha 18 horas por dia e tem uma encomenda de 5.000 porcas, 5.000 parafusos e 5.000 pregos. Durante quantas horas ela deve empregar cada método para fazer a entrega o mais rapidamente possível?

13. Seja $f(x, y) = 3x + 3y$ definida na região poliedral convexa abaixo:

a) Qual o valor máximo e mínimo de f?
b) Calcule os valores $f(A)$, $f(B)$ e $f(P)$, onde P é um ponto no segmento AB.
c) Use (*a*) e (*b*) para determinar os pontos onde f atinge o máximo e os pontos onde assume o mínimo.

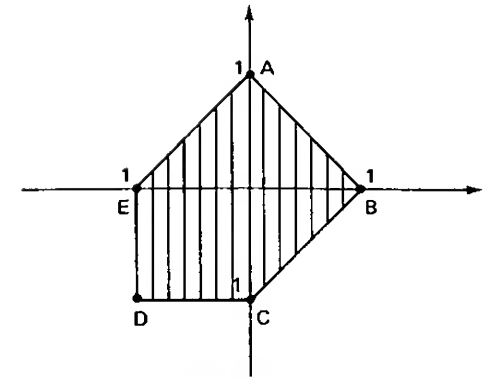


Figura 14.4.13

14. Numa indústria química há uma caldeira cuja margem de segurança é tal que a pressão P medida em atmosferas, e a temperatura T, medida em graus Celsius, devem ser reguladas de maneira que $10P + T \leqslant 400$. Quer-se usar a caldeira para que seja processada uma determinada reação. Para que isto ocorra da forma desejada, a temperatura deve estar entre 80°C e 300°C, e a pressão entre 1 e 20 atmosferas. A que temperatura e pressão deve trabalhar a caldeira para que a reação se processe no menor tempo possível, se sabemos que a velocidade da reação é dada por $v = 2T + 30P + 20$?

15. Mostre que uma região poliedral convexa limitada A do $\mathbf{R}^3$ pode ser caracterizada pelos seus vértices $v_1, \ldots, v_n$ da seguinte maneira:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R}^3;\ x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n,\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

16. Construção de Casas Populares. (Problema coletado pelo Prof. Rodney Bassanezzi em Guarapuava-PR.)

Tipo de Casa	*A*	*B*	*C*
Número de pessoas que abriga	6	4	3
Custo de construção (em UPC)	1.200	1.000	800
Demanda (nº de famílias que solicitaram)	150	200	250

Verba total disponível: 2.000.000 UPC.

a) Determine quantas casas de cada tipo devem ser construídas de modo a atender o maior número de pessoas possível.

b) Resolva o item *a*) supondo que o custo da casa do tipo *B* passou para 1.040 UPC.

c) Estabeleça um critério que leve em conta o número de pessoas e o número de famílias que solicitaram as casas. Determine o número de casas de cada tipo a serem construídas de modo a otimizar o critério que você adotou.

14.5 MÉTODO SIMPLEX

14.5.1 Introdução

O método gráfico apresentado na seção anterior é utilizado apenas para problemas com duas ou três variáveis. Para problemas maiores, o método gráfico torna-se impraticável, neste caso nós precisamos de uma técnica eficiente para resolver problemas de programação linear com mais de três variáveis. Esta técnica é o *método simplex*.

O método simplex nada mais é do que um algoritmo de busca, isto é, ele começa num vértice da região factível e move-se de um vértice factível a outro até encontrar o vértice ótimo. Foi desenvolvido em 1947 por George B. Dantzig, e após sua concepção houve um crescimento espantoso da programação linear, com centenas de livros e artigos publicados nos círculos acadêmicos. Antes de 1947, a programação linear era praticamente desconhecida, havendo, entretanto, algumas exceções, por exemplo, Fourier (1823), de la Poussin (1911), Kantorovich (1939).

A pouca utilização da programação linear antes de 1947 era devida à grande dificuldade computacional de se resolver problemas lineares, pelo fato de existir um grande número de combinações (factíveis e não-factíveis) a serem pesquisadas. Com o método simplex essa dificuldade foi otimizada, pois o algoritmo simplex realiza uma busca apenas nos vértices factíveis (que pertencem à região factível).

Nesta seção, introduziremos o método simplex através da resolução de um modelo simples de programação linear. Uma visão algébrica do método simplex também será apresentada, para que o leitor verifique que atrás do "procedimento mecânico" do método simplex existe toda uma base algébrica. Por último, será apresentado um programa na linguagem Basic que resolve problemas de programação linear e pode facilmente ser implementado em qualquer microcomputador existente no mercado.

14.5.2 Exemplo do Fabricante de Móveis

Problema: Vamos considerar um fabricante de móveis que fabrica apenas mesas e cadeiras. Ele tem um lucro[1] de Cr$4.500,00 em cada cadeira e de Cr$8.000,00 em cada mesa vendida. Supõe-se que devido à forte demanda desses itens consegue-se vender toda a produção da fábrica. Mas, a produção da firma é limitada em dois aspectos:

1) Cada cadeira produzida utiliza 5 unidades de jacarandá. Da mesma forma, cada mesa de jacarandá produzida utiliza 20 unidades de jacarandá. Dispomos de um total de 400 unidades de jacarandá.

2) Cada cadeira produzida gasta 10 homens-horas e cada mesa produzida gasta 15 homens-horas. Dispomos de um total de 450 homens-horas.

O objetivo do fabricante é descobrir qual a quantidade ótima de cadeiras e mesas a serem fabricadas, de tal modo que o lucro total seja o maior possível.

14.5.3 Modelando o Problema Matematicamente

Em primeiro lugar vamos identificar as variáveis do modelo. Vamos chamar de

x_1 = número total de cadeiras fabricadas; e de
x_2 = número total de mesas fabricadas.

Uma vez identificadas as nossas variáveis (na terminologia de programação linear chamadas de variáveis de decisão), fica fácil estabelecer o modelo matemático do problema do fabricante de móveis.

O lucro do fabricante pode ser expresso da seguinte maneira:

$$L = 4.500x_1 + 8.000x_2$$

e as restrições do problema:

$$5x_1 + 20x_2 \leqslant 400 \text{ (restrição de disponibilidade da matéria-prima)}$$

$$10x_1 + 15x_2 \leqslant 450 \text{ (restrição de disponibilidade de mão-de-obra)}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{matrix}\right\} \text{ (restrições de não-negatividade)}$$

[1] Lucro é definido como o preço de venda menos o custo de fabricação.

E assim, o modelo de programação linear do problema do fabricante de móveis pode ser estabelecido formalmente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Max } L = 4.500x_1 + 8.000x_2 \\ \text{s/a} \quad 5x_1 + 20x_2 \leqslant 400 \quad (R_1) \\ 10x_1 + 15x_2 \leqslant 450 \quad (R_2) \\ x_1 \geqslant 0 \quad (R_3) \\ x_2 \geqslant 0 \quad (R_4) \end{aligned}$$

14.5.4 Solução Geométrica

Desenhando as restrições descritas na seção 14.5.3 obtemos a seguinte região factível:

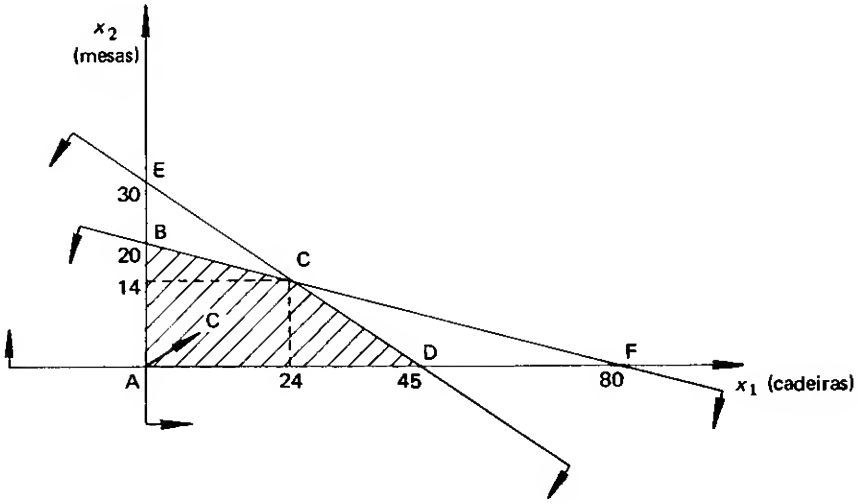


Figura 14.5.13

Portanto, utilizando o método gráfico verificamos que o vértice C é o vértice ótimo e corresponde à fabricação de 24 cadeiras e 14 mesas com um lucro de $24 \cdot 4.500 + 14 \cdot 8.000 =$ Cr$ 220.000,00$

14.5.5 Forma Padrão do Problema do Fabricante de Móveis

Como foi visto nas seções anteriores, a solução ótima para qualquer problema de programação linear ocorre num dos vértices da região factível. Esses vértices ocorrem onde retas se cruzam. Portanto, antes de resolver um

problema de programação linear pelo método simplex, devemos transformar o sistema de inequações linares, geradas pelas restrições do problema, em um sistema de equações lineares, ou seja, devemos transformar o problema de programação linear original na forma padrão.

Problema do fabricante de móveis:

$$\begin{aligned} \text{Max } L = 4.500x_1 + 8.000x_2 \\ \text{s/a} \quad 5x_1 + 20x_2 \leqslant 400 \\ 10x_1 + 15x_2 \leqslant 450 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Nós devemos transformar a inequação $5x_1 + 20x_2 \leqslant 400$ em equação, para isto basta associar uma variável x_3, que é chamada de variável de folga, na inequação:

$$5x_1 + 20x_2 + x_3 = 400$$

Usando o mesmo raciocínio para a 2ª restrição, obtemos:

$$10x_1 + 15x_2 + x_4 = 450$$

Logo, o problema na forma padrão fica:

$$\begin{aligned} \text{Max } L = 4.500x_1 + 8.000x_2 \\ \text{s/a} \quad 5x_1 + 20x_2 + x_3 = 400 \\ 10x_1 + 15x_2 + x_4 = 450 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

14.5.6 Algumas Definições

Considere o seguinte sistema linear:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}\right\} \quad (\text{I})$$

que escrito na forma matricial torna-se

$$\mathbf{Ax = b}$$

Suponha que o posto de A seja igual a m e que $n > m$.

a) Solução Básica

Dado um conjunto de m equações lineares com m incógnitas, conforme definido em (I), vamos chamar de B qualquer submatriz $m \times m$, não-singular, formada por m colunas independentes de A (se A tem posto igual a m então tal submatriz existe. Por quê? Veja 3.7.1), e seja N a submatriz $m \times (n - m)$ formada pelas $n - m$ colunas restantes (aquelas que não pertencem a B). Portanto, $Ax = b$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

pois A foi particionada em B e N ($A = [B, N]$) e x em x_B e x_N ($x = [x_B, x_N]$), onde x_B = [vetor de m componentes formado pelas variáveis associadas às colunas de B] e x_N = [vetor de $(n - m)$ componentes formado pelas variáveis associadas a N].

Então, se todos os componentes de x_N forem fixos iguais a zero, a solução para o conjunto resultante, $Bx_B = b$, é dito ser uma solução básica para (I) com respeito à base B. Os componentes de x_B são chamados de variáveis básicas e os componentes de x_N de variáveis não-básicas.

b) Solução Básica Degenerada

Se uma ou mais variáveis básicas em uma solução básica tem valor zero, esta solução é dita ser solução básica degenerada. Do ponto de vista geométrico, isto ocorre quando temos um vértice determinado pela intersecção de mais de duas retas.

Vamos considerar agora o seguinte sistema

$$\left.\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

o qual representa as restrições de um problema de programação linear na forma padrão.

c) Solução Factível

Um vetor x satisfazendo todas as restrições de (II) é dito ser factível para este sistema. Uma solução factível para (II) que também é básica é chamada de solução básica factível. Se esta solução também for uma solução básica degenerada, ela será chamada de solução básica factível degenerada.

Considere agora o problema de programação linear na forma padrão:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Min } cx \\ &\text{s/a } Ax = b \\ &\qquad x \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

d) Solução Básica Factível Ótima

É a solução básica factível que dentre todas as soluções básicas factíveis de (III) nos dá o valor ótimo (no caso, o valor mínimo) para a função objetivo.

Teorema Fundamental da Programação Linear

Dado um problema de programação linear na forma padrão (III) onde A é uma matriz $m \times (n + m)$ de posto m,

i) se há uma solução factível, há uma solução básica factível;

ii) se há uma solução factível ótima, há uma solução básica factível ótima.

Do teorema anterior e da equivalência entre solução básica factível e vértice temos que o método simplex é finito, pois um sistema linear de m equações com $(n + m)$ incógnitas tem no máximo

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \quad \text{soluções básicas}$$

Logo, o método simplex efetua um número menor que $\binom{n+m}{m}$ iterações para encontrar a solução ótima, pois o algoritmo simplex é um procedimento de busca, isto é, move-se de vértice factível em vértice factível, ou seja, de solução básica factível em solução básica factível até encontrar o ótimo.

Considere agora o problema do fabricante de móveis na forma padrão conforme estabelecido na seção 14.5.5 e sua resolução geométrica na seção 14.5.4.

Temos que

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 1 & 0 \\ 10 & 15 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [4.500,\ 8.000,\ 0,\ 0]$$

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

$$b = [400,\ 450]^T$$

São soluções básicas:

1) O ponto A

Neste caso, a base B é formada pelas colunas de x_3 e x_4 na matriz A. Portanto,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{x}_B \equiv$ vetor das variáveis básicas $\equiv [x_3\ x_4]$

$$\mathbf{B}_1\mathbf{x}_{B_1} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 450 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_{B_1} = [x_3\ \ x_4] = [400\ \ 450]$$

Fixando $x_1 = x_2 = 0$ temos que a solução basica associada à base $\mathbf{B}_1$ é $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 400, 450)$

2) O ponto B

Tomando a base $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 21 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_B = (x_2, x_4)$

temos

$$\mathbf{B}_2\mathbf{x}_B = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 450 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = (x_2, x_4) = (20\ \ 150)$$

Portanto, fixando $x_1 = x_3 = 0$ temos que a solução básica associada à base $\mathbf{B}_2$ é $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 20, 0, 150)$.

3) O ponto C

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_B = (x_1, x_2) = (24, 14)$$

A solução básica associada à base $\mathbf{B}_3$ é
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (24, 14, 0, 0)$

4) O ponto D

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{B_4} = (x_1, x_3) = (45, 175)$$

A solução básica associada à base $\mathbf{B}_4$ é
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (45, 0, 175, 0)$

5) O ponto E

$$\mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_B = (x_2, x_3) = (30, -200)$$

A solução básica associada à base $\mathbf{B}_5$ é
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 30, -200, 0)$

6) O ponto F

$$\mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_B = (x_1, x_4) = (80, -350)$$

A solução básica associada à base $\mathbf{B}_6$ é

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (80, 0, 0, -350)$

São soluções básicas factíveis (vértices).

1) o ponto A;
2) o ponto B;
3) o ponto C;
4) o ponto D.

14.5.7 Tableau Simplex

Vamos reescrever o problema do fabricante de móveis da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \text{Max } L \quad & -4.500x_1 - 8.000x_2 - 0x_3 - 0x_4 = 0 \\ \text{s/a} \quad & 5x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 400 \\ & 10x_1 + 15x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 450 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

O método simplex sempre começa com uma *base inicial factível.* Como no problema do fabricante de móveis todas as restrições são do tipo $\leqslant$, temos uma base óbvia que é a identidade, referente às colunas das variáveis de folga x_3 e x_4.

Portanto, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_B = [x_3, x_4] = [400, 450]$

e $x_1 = x_2 = 0$ (se você não entendeu o porquê disso, leia novamente a definição de solução básica factível). E o tableau simplex associado a esta base inicial é

Colunas	1	2	3	4	5	6	
		x_1	x_2	x_3	x_4		
Linhas da função objetivo	L	-4.500	−8.000	0	0	0	≡ Valor atual da função objetivo
Variáveis básicas	x_3	5	20	1	0	400	≡ b_1
	x_4	10	15	0	1	450	≡ b_2

Biblioteca de Ciência & Tecnologia
UFPel

O tableau simplex acima consiste de:

1) 6 colunas: A primeira contém informação sobre a base atual (você lê na 1ª coluna a função objetivo L e as variáveis x_3 e x_4 que são a nossa solução básica inicial). As colunas 2, 3, 4 e 5 contêm informação a respeito das variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4, respectivamente. E a última coluna contém na 1ª linha o valor atual da função objetivo e nas duas últimas, os valores atuais das variáveis básicas x_3 e x_4.
2) 3 linhas: A primeira refere-se à linha da função objetivo; os valores na linha da função objetivo (excetuando-se a última coluna) são chamados pela terminologia da programação linear de custo reduzido. As duas últimas linhas referem-se às duas restrições do problema.

Para verificarmos se o tableau expressa uma solução básica factível basta verificar se os valores das variáveis básicas são $\geqslant 0$. O tableau simplex nos diz que a nossa base B é composta pelas colunas x_3 e x_4 da matriz A (veja a 1ª coluna do tableau) e os valores das variáveis básicas são lidos na última coluna. O tableau nos diz também se a solução básica factível associada à base B é ótima ou não.

Para sabermos se a solução básica factível é ótima ou não, basta verificar se existe alguma variável não-básica que entrando na base melhore o valor da função objetivo.

14.5.8 Verificando quem Entra na Base

As duas variáveis não-básicas no tableau simplex são x_1 e x_2.

A coluna de x_1, no tableau simplex diz que: "Se aumentarmos a variável x_1 em uma unidade nós utilizamos 5 unidades de x_3 e 10 unidades de x_4 *com um acréscimo no valor da função objetivo* de Cr$ 4.500,00 (repare que temos 4.500 porque passamos o custo de x_1 para o lado esquerdo da equação)".

A coluna de x_2 diz que: "Ao aumentarmos a variável x_2 em uma unidade nós utilizamos 20 unidades de x_3 e 15 unidades de x_4 e *teremos um acréscimo* de Cr$ 8.000,00 no valor da função objetivo".

Como o nosso problema é maximizar, nós não estamos no ótimo pois se entrarmos na base com uma das variáveis não-básicas, x_1 ou x_2, nós teremos um acréscimo no valor da função objetivo.

Há vários critérios de entrada na base, mas o mais comum deles é fazer entrar na base a variável não-básica que tiver o custo reduzido mais negativo, pois assim nós teremos um acréscimo maior no valor da função objetivo (isto não quer dizer que necessariamente chegaremos ao ótimo mais rápido!).

Se seguirmos o critério acima, a variável x_2 entra na base pois ela nos dá um acréscimo de Cr$ 8.000,00 no valor da função objetivo (se x_1 entrasse, nós teríamos um aumento de apenas Cr$ 4.500.00).

Para x_2 entrar na base alguém precisa sair (para manter o posto de B). Quem sai da base?

Se uma unidade de x_2 contribui em Cr$ 8.000,00 para o lucro então nós devemos aumentar x_2 o máximo possível, ou seja, nós devemos aumentar x_2 até que ele não viole as restrições de matéria-prima e mão-de-obra.

Para a restrição de matéria-prima nós temos:

$\frac{400}{20} = 20 \equiv$ indica que como nós temos um total de 400 unidades disponíveis de matéria-prima e cada unidade de x_2 gasta 20 unidades de x_3, então 20 unidades de x_2 podem ser processadas sem que a variável x_3 torne-se negativa.

Para a restrição de mão-de-obra temos:

$\frac{450}{15} = 30 \equiv$ indica que podemos processar 30 unidades de x_2 sem que x_4 torne-se negativa.

Portanto, nós devemos fabricar 20 unidades de x_2 pois se fabricarmos mais de 20 unidades a restrição de matéria-prima será violada. Observe que quando a variável x_2 aumenta, a variável x_3 vai diminuindo, e quando x_2 atinge 20 unidades a variável x_3 assume o valor zero.

Portanto, a variável x_2 entra na base com valor 20 e x_3 sai da base porque zerou.

Observação: Se houver mais de uma variável básica que assuma valores nulos então deve-se escolher apenas uma delas para deixar a base, as demais ficam na base com valores iguais a zero (solução degenerada).

14.5.9 Pivoteamento

O tableau simplex deve expressar a nova base que é formada pelas colunas de x_2 e x_4. A primeira modificação a ser feita no tableau é trocar x_3 por x_2 na primeira coluna do tableau. Agora, a fim de que o tableau expresse a nova base é necessário isolar x_2 na sua coluna, ou seja,

$$\begin{array}{c} x_2 \\ 0 \\ x_2 \text{ -------} 1 \text{---------} \\ 0 \end{array}$$

Para transformar x_2 na forma acima nós devemos realizar operações no tableau de tal maneira que o elemento-pivô (elemento que se encontra na intersecção da coluna da variável que entra na base com a linha da variável que sai da base) se torne 1 e os demais elementos da coluna sejam transformados em zero. Tal procedimento se chama *pivoteamento* e nada mais é do que realizar operações elementares (veja secção 2.3) no tableau (que é equivalente ao sistema gerado pelas restrições do problema na forma padrão) com o intuito de transformar a coluna x_2 na forma citada acima.

Portanto, após efetuado o pivoteamento o tableau simplex torna-se:

Tableau 2:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
L	2.500	0	400	0	160.000
x_2	1/4	1	1/20	0	20
x_4	25/4	0	15/20	1	150

que corresponde à seguinte base

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_B = [x_2, x_4] = (20, 150]$$

coluna original de x_4

coluna original de x_2

e temos a seguinte solução básica factível

$$x\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 20, 0, 150)$$

E o tableau 2 expressa o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Max } L - 2.500x_1 + 0x_2 + 400x_3 + 0x_4 &= 160.000 \\ \text{s/a} \quad 1/4x_1 + 0x_2 + 1/20x_3 + 0x_4 &= 20 \\ 25/4x_1 + 0x_2 - 15/20x_3 + 0x_4 &= 50 \end{aligned}$$

que é equivalente ao problema original pois foram efetuadas operações elementares no problema original para se chegar ao problema acima.

A pergunta que nos surge é: Estamos no ótimo? De novo precisamos verificar se ao entrarmos com alguma variável não-básica na base haverá um acréscimo (melhoria) no valor da função objetivo.

As nossas variáveis não-básicas atuais são x_1 e x_3 (por quê?). Vamos verificar o que cada uma dessas colunas expressa.

A coluna de x_1 nos diz que: "Ao aumentarmos a variável x_1 em uma unidade, sacrificamos 1/4 unidades de x_2 e 25/4 unidades de x_4 e ao fazermos isto temos um acréscimo de Cr$ 2.500,00 no valor atual da função objetivo".

A coluna de x_3 nos diz: "Ao aumentarmos a variável x_3 em uma unidade usamos 1/20 unidades de x_2 e ganhamos 15/20 unidades de x_4, com decréscimo de Cr$ 400,00 na função objetivo".

Portanto, se a variável x_1 entrar na base será um negócio lucrativo. Enquanto que se a variável x_3 entrar na base será um mal negócio, pois o valor da função objetivo diminuirá. Logo, a variável x_1 entra na base.

E quem sai da base?

Sai a variável que zerar primeiro. Quando x_1 aumenta, x_2 diminui em 1/4; portanto, nós podemos aumentar x_1 até o valor de $\frac{20}{1/4} = 80$ sem que a variável x_2 se torne negativa. E nós podemos aumentar x_1 até $\frac{150}{25/4} = \frac{600}{25} = 24$ sem que a variável x_4 se torne negativa. Assim, a variável que zera primeiro é a variável x_4 e portanto ela deixa a base.

Assim, devemos pivotear sobre o elemento-pivô que fica na intersecção da coluna x_1 com a linha da variável básica x_4.

Após efetuadas as operações de pivoteamento sobre o tableau atual temos um novo tableau:

Tableau 3:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
L	0	0	100	400	220.000
x_2	0	1	4/25	1/25	14
x_1	1	0	3/25	4/25	24

Estamos no ótimo? Para responder essa pergunta precisamos verificar o que as colunas das variáveis não-básicas nos dizem.

A coluna de x_3 nos diz que: "Ao aumentarmos x_3 em uma unidade nós gastamos 4/25 unidades da variável x_2 e ganhamos 3/25 unidades de x_1, e esta ação nos leva a um decréscimo de Cr$ 100,00 no valor da função objetivo". Como o problema é de maximização, seria um mal negócio fazer a variável x_3 entrar na base.

A coluna de x_4 nos diz: "Ao aumentarmos x_4 em uma unidade, nós ganhamos 1/25 unidades de x_2 e gastamos 4/25 unidades de x_1, ocasionando um decréscimo de Cr$ 400,00 no valor da função objetivo". Esta ação também não é lucrativa.

Como as variáveis não-básicas atuais, x_3 e x_4, do problema não podem entrar na base, pois se isso ocorresse nós teríamos um decréscimo no valor da função objetivo, nós estamos no ótimo.

A base ótima é:

$$\mathbf{B} = [a_2, a_1] = \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$$

e a solução básica factível ótima correspondente a esta base é:

$\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*] = [24, 14, 0, 0] \equiv$ solução única e finita

O valor ótimo

$L^* = 4.500x_1^* + 8.000x_2^* =$ Cr$ 220.000,00

Agora, olhando no gráfico da região factível apresentado em 14.5.4 verificamos o caminho feito pelo método simplex até alcançar o ponto ótimo $\mathbf{X}^*$

Tableau	*Solução*	*Pontos correspondentes no gráfico*
1 (inicial)	x = (0, 0, 400, 450)	A
2	x = (0, 20, 0, 150)	B
3	x* = (24, 14, 0, 0)	C

A tabela acima serve simplesmente para verificarmos que o método simplex caminha de vértice (= solução básica factível) em vértice até alcançar o ponto ótimo.

14.5.10 Método Simplex – Uma Visão Algébrica

Considere o problema de programação linear, dado baixo, na forma padrão

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Min} & z & = \mathbf{cx} \\ \text{s/a} & \mathbf{Ax} & = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geqslant 0 \end{array}\right\} \text{(I)}$$

onde

$$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times (n+m)}$$
$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{1 \times (n+m)}$$
$$\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{1 \times m}$$
$$\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{(n+m) \times 1}$$

O que nós vamos fazer agora é particionar a matriz A em duas submatrizes, B e N, que chamaremos de submatriz básica e submatriz não-básica, respectivamente. Da mesma forma, faremos isto com os vetores
$\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}]$ e $\mathbf{c} = [\mathbf{c_B}, \mathbf{c_N}]$.

Uma vez feito isto, nós podemos reescrever o problema expresso em (I) da seguinte maneira:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Min} & z = \mathbf{c_B x_B} + \mathbf{c_N x_N} & \\ \text{s/a} & \mathbf{B\,x_B} + \mathbf{N x_N} = \mathbf{b} & \\ & \mathbf{x_B} \geqslant 0, \mathbf{x_N} \geqslant 0 & \end{array}\right\} \text{(II)}$$

Se expressarmos $\mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}$ na forma $\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1}b} - \mathbf{B^{-1}Nx_N}$ e substituirmos este resultado na linha da função objetivo obtemos:

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z + 0\mathbf{x_B} + (\mathbf{c_B B^{-1} N} - \mathbf{c_N})\,\mathbf{x_N} = \mathbf{c_B B^{-1}}\,\mathbf{b} \\ \text{s/a} & \mathbf{x_B} + \mathbf{B^{-1} N x_N} = \mathbf{B^{-1} b} \\ & \mathbf{x_B} \geqslant 0,\ \mathbf{x_N} \geqslant 0 \end{array}$$

O problema acima é expresso na forma de tableau da seguinte maneira:

	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{x_N}$	
z	0	$\mathbf{c_B B^{-1} N} - \mathbf{c_N}$	$\mathbf{c_B B^{-1} b}$
$\mathbf{x_B}$	I	$\mathbf{B^{-1} N}$	$\mathbf{B^{-1} b}$

Este tableau nos dá a representação da linha da função objetivo z e das variáveis básicas em termos das variáveis não-básicas. Quando temos uma solução básica factível, ou seja, uma solução do tipo $\mathbf{x} = (\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}) = (\mathbf{x_B}, 0)$, nós

obtemos o valor atual de z (pode ser lido diretamente do tableau na intersecção da linha z com a coluna mais à direita do tableau) e os valores atuais das variáveis básicas (na coluna mais à direita, logo abaixo da linha de z).

Sempre que temos uma solução básica factível nós desejamos saber se esta solução é ótima ou não. Para sabermos se estamos no ótimo basta verificarmos qual é o efeito produzido no valor da função objetivo quando fazemos uma variável não-básica, digamos x_j, sair do nível zero e passar para um nível positivo; se ao fazermos isto ocorrer uma melhoria no valor da função objetivo, então é interessante x_j entrar na base. Para compreendermos melhor, vamos expressar a equação $z = \mathbf{c_B B^{-1} b} - (\mathbf{c_B B^{-1} N} - \mathbf{c_N})\mathbf{x_N}$ de outra maneira:

$$z = z_0 - (z_j - c_j)x_j \text{ para todo } x_j \text{ pertencente à submatriz N.}$$

onde: $z_0 = \mathbf{c_B B^{-1} b} \equiv$ valor atual da função objetivo

$z_j = \mathbf{c_B B^{-1}} a_j$

$(z_j - c_j) =$ custo reduzido da variável x_j.

Como o problema é minimizar, então é interessante que x_j entre na base quando o seu custo reduzido $(z_j - c_j)$ for maior do que zero, porque assim quando x_j cresce o valor da função objetivo decresce. Se $(z_j - c_j) \leqslant 0$, então o valor da função objetivo aumentará, ou permanecerá o mesmo, quando x_j aumentar. Portanto, para um *problema de minimização* as nossas candidatas a entrar na base serão as variáveis não-básicas cujo custo reduzido $(z_j - c_j)$ for maior do que zero. Quando uma ou mais variáveis não-básicas satisfizerem $(z_j - c_j) > 0$ usa-se como critério de desempate escolher aquela variável não-básica que tiver o custo reduzido mais positivo.

Suponha que a variável não-básica x_k entre na base $((z_k - c_k) > 0)$. Portanto, a variável não-básica x_k sairá do seu nível zero e passará a ter um valor positivo, mudança que acarretará um efeito nas variáveis básicas dado pela equação:

$$\mathbf{x_B} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{y}_k x_k$$

onde $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B^{-1}b} \equiv$ valor atual das variáveis básicas

$\mathbf{y}_j = \mathbf{B^{-1}a}_k \equiv$ coluna da variável x_j atualizada

que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

ou ainda,

$$x_{B_i} = \hat{b}_i - y_{ik}x_k$$

Quando a variável x_k cresce podem ocorrer 3 casos:

1) Se $y_{ik} > 0$, então a variável x_{B_i} diminui à medida que x_k cresce, ou seja, x_{B_i} é candidata a sair da base.
2) Se $y_{ik} = 0$, então x_{B_i} não se altera quando x_k cresce.
3) Se $y_{ik} < 0$, então x_{B_i} cresce à medida que x_k cresce.

Nós só devemos nos preocupar com o caso 1, $y_{ik} > 0$, pois quando x_k cresce, x_{B_i} diminui e nós devemos tomar o cuidado de não deixar que x_{B_i} se torne negativo. Cada variável básica que tem seu componente em y_k maior do que zero é uma candidata a deixar a base, e deixa a base aquela que zerar primeiro.

14.5.11 Tipos de Solução

Nós podemos verificar através do tableau simplex soluções do tipo:

a) Alternativa

Se no tableau simplex tivermos o ótimo e existir uma variável não-básica, digamos x_k, com seu custo reduzido $(z_k - c_k)$ igual a zero, então nós temos soluções alternativas. Isso é fácil de ver pois

$$z = z_0 - (z_k - c_k)x_k \text{ e } (z_k - c_k) = 0,$$

então x_k pode entrar na base que o valor da função objetivo z não se altera, ou seja, mudamos de uma solução básica factível (vértice) para outra sem alterar a função objetivo; isto ocorre quando temos soluções alternativas.

b) Ilimitada ($z \to \alpha$)

Se no tableau existir alguma variável não-básica candidata a entrar na base, digamos x_k, e y_k tem todos os seus componentes menores ou iguais a zero (casos 2 e 3 da seção anterior), então nós temos solução ótima infinita, pois x_k pode crescer que nenhuma variável básica sairá da base porque crescerá junto com x_k, mas se as variáveis básicas crescerem sem limite, z que é função dessas variáveis crescerá sem limite também.

Observação: Compare estas observações com 14.3.3.

Biblioteca de Ciência & Tecnologia
UFPel

14.5.12 Resumo do Método Simplex

Passos do Algoritmo Simplex – Problema de Minimização

Passo 1: Ache uma solução básica factível com base B. Forme o tableau simplex inicial.

	x_B	x_N	
z	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1} b$
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1} b$

Passo 2: Calcule $(z_k - c_k)$ = máximo $\{(z_j - c_j)$ para todas as variáveis não-básicas $x_j\}$

Passo 3 (critério de otimalidade): Se $(z_k - c_k) \leqslant 0$ então pare: a solução atual é ótima. Caso contrário, vá para o passo 4.

Passo 4: Se $y_k \leqslant 0$, então pare: a solução ótima é ilimitada. Caso contrário, vá para o passo 5.

Passo 5 (teste da razão): Determine o índice r como se segue

$$\frac{\hat{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\text{mínimo}} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{y_{ik}} \text{ para apenas os } y_{ik} > 0 \right\}$$

Observação: $\hat{b}_r$ = r-ésimo componente do vetor $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}$

Passo 6: Pivote em y_{rk}
Pivoteamento em y_{rk} é definido como.

a) Divida a linha r por y_{rk}.

b) Para $i = 1, 2, \ldots, m$ e $i \neq r$, atualize a i-ésima linha da seguinte maneira: "multiplique a nova linha r por $-y_{ik}$ e some a linha resultante à linha i".

c) Atualize a linha da função objetivo da seguinte maneira: "multiplique a nova linha r por $(c_k \quad z_k)$ e some a linha resultante com a linha da função objetivo"

Passo 7. Atualize as variáveis básicas e não-básicas onde x_k entra na base e x_{B_r} deixa a base e volte para o passo 2.

Observação 1: Se o problema for maximizar, apenas o passo 3 (critério de otimalidade) sofrerá (por quê?)

Passo 3 (critério de otimalidade): Se $(z_k - c_k) \geqslant 0$ então pare: a solução atual é ótima. Caso contrário, vá para o passo 4.

Observação 2: O método simplex trabalha apenas com variáveis não-negativas, ou seja, $x \geqslant 0$. Na prática, isso nem sempre acontece; nestes casos precisamos fazer uma transformação de variáveis para garantir que todas as variáveis sejam não-negativas (veja bibliografia para maiores detalhes).

14.5.13 Método das 2 Fases

Como foi dito na seção anterior o método simplex sempre começa com uma solução básica factível inicial.

Quando nós temos um problema linear com todas as restrições do tipo $\leqslant$ nós temos uma base factível inicial óbvia, que é a identidade formada pelas colunas das variáveis de folga.

Mas nem sempre isso é possível; neste caso, precisamos de um método que nos dê uma solução básica factível inicial. Um desses métodos é o método das 2 fases.

O método das 2 fases começa com a fase 1, que é a minimização da soma das variáveis artificiais, sujeita a restrições $\mathbf{Ax} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant 0$ e $\mathbf{x}_a \geqslant 0$. Se o problema original $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant 0$, tem solução factível, então o valor ótimo para a função objetivo da fase 1 é zero, pois todas as variaveis artificiais acopladas ao problema original tendem a zero, ou seja, elas deixam a a base; após eliminarmos as colunas pertencentes às variáveis artificiais não-básicas, começamos a fase 2 que é resolver o problema original com a base factível encontrada na fase 1.

14.5.14 Resumo do Método das 2 Fases

Fase 1: Para cada restrição do tipo $\geqslant$ ou = associe uma variável artificial. Resolva o problema abaixo começando com a solução básica factível $\mathbf{x} = 0$ e $\mathbf{x}_a = \mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z_a = \mathbf{1}\mathbf{x}_a \\ \text{s/a} \quad & \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqslant 0, \ \mathbf{x}_a \geqslant 0 \end{aligned}$$

Se no ótimo o valor de $z_a \neq 0$, então pare: o seu problema original não tem solução factível. Caso contrário, elimine todas as colunas artificiais e a linha da função objetivo artificial. Vá para a fase 2.

Fase 2: Acople a função objetivo linear original e resolva o problema com a solução básica factível $x_B = B^{-1}b$ e $x_N = 0$. *Observe que* x_B contém as variáveis legítimas do problema original uma vez que assumimos que as variáveis artificiais deixaram a base. Portanto, nós devemos resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_B x_B + c_N x_N \\ \text{s/a} \quad & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & x_B \geqslant 0,\ x_N \geqslant 0 \end{aligned}$$

14.5.15 Programa-Exemplo

Nesta seção apresentamos um programa escrito em linguagem Basic que resolve problemas de programação linear do tipo

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad z \ &= \ cx \\ \text{s/a} \quad & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

O programa foi escrito com o objetivo de permitir seu uso em qualquer microcomputador existente no mercado. Nos micros do tipo Sinclair (TK82-C, TK85, CP200...) deve-se fazer certas alterações:

i) Usar o comando de atribuição *LET* em todas as atribuições do programa.

ii) Desprezar a entrada dos dados através do comando *DATA* e utilizar apenas a entrada através do teclado (veja o exemplo da rodada).

a) Listagem do Programa

```
10      ! ********************************
20      ! *                              *
30      ! *     Este Prosrama resolve    *
40      ! * Problemas de Prosramacao     *
50      ! * linear do tipo :             *
60      ! *                              *
70      ! *        Max  z = cx           *
80      ! *        s/a                   *
90      ! *             Ax <= b          *
100     ! *              x >= 0          *
110     ! *                              *
120     ! *                              *
130     ! ********************************
140     ! *                              *
```



```
150     ! *     Arrays utilizados :      *
160     ! *     ------ ----------       *
170     ! *                              *
180     ! *  Ii( m )    : Vetor que con- *
190     ! *               tem os indices *
200     ! *               das variaveis  *
210     ! *                basicas       *
220     ! *  A( m,n+m+1 ) : Matriz tec- *
230     ! *                nologica am -  *
240     ! *                pliada (inclui *
250     ! *                 vetor b  )   *
260     ! *  F( n+ m )  : Vetor custo    *
270     ! *  C1( n+m )  : Vetor de cus - *
280     ! *                tos reduzidos *
290     ! *                              *
300     ! *------------------------------*
310     ! *                              *
320     ! *  Observacao : Se a entrada   *
330     ! *   de dados for atraves do    *
340     ! *   comando DATA , deve - se   *
350     ! *   colocar a partir da linha  *
360     ! *   1850 os dados da sesuinte  *
370     ! *   forma  :                   *
380     ! *                              *
390     ! *             Restricao 1      *
400     ! *             Restricao 2      *
410     ! *             ...........      *
420     ! *             Restricao m      *
430     ! *             b( 1 )           *
440     ! *             b( 2 )           *
450     ! *             ......           *
460     ! *             b( m )           *
470     ! *             c( 1 )           *
480     ! *             c( 2 )           *
490     ! *             ......           *
500     ! *             c( n )           *
510     ! *                              *
520     ! ********************************
530     Print " Numero de restricoes "
540     Input M
550     Print " Numero de variaveis "
560     Input N
570     N1 = N + 1
580     N2 = N + M
```

```
590     N3 =  N + M + 1
600     Rem *** Chamada da rotina de Leitura ***
610     Gosub 650
620     Rem *** Chamada da rotina Simplex ***
630     Gosub 1200
640     End
650     Rem *** Rotina de Leitura ***
660     Rem *** Declaracao dos arrays ***
670     Rem *** Dim I1(M),A(M,N3),F(N2),C1(N2) ***
680     Rem *** O comentario acima indica as  ***
690     Rem *** dimensoes minimas dos arrays  ***
700     Dim I1(10),A(10,31),F(30),C1(30)
710     I = 0
720     For J = N1 to N2
730     I = I + 1
740     I1( I ) = J
750     Next J
760     For I = 1 to M
770     For J = N1 to N2
780     If J = M+1 Then A(I,J) = 1 Else A(I,J) = 0
790     Next J
800     Next I
810     For I = N1 to N2
820     F( I ) = 0
830     Next I
840     Print " Entrada da matriz de restricoes pelo "
850     Print " teclado( T ) ou pelo DATA( D ) "
860     Input R$
870     If R$ = "T" Then 1000
880     For I = 1 to M
890     For J = 1 to N
900     Read A( I,J )
910     Next J
920     Next I
930     For I = 1 to M
940     Read A( I,N3 )
950     Next I
960     For I = 1 to N
970     Read F( I )
980     Next I
990     Return
1000    Print " Entrada da matriz de restricoes "
1010    For I = 1 to M
1020    For J = 1 to N
1030    Print " A(";I;",";J;") = ";
1040    Input A( I,J )
```



```
1050    Next J
1060    Next I
1070    Print " Entrada do Vetor b "
1080    For I = 1 to M
1090    Print " b(";I;") = ";
1100    Input A( I,N3 )
1110    Next I
1120    Print " Entrada do Vetor Custo "
1130    Print " ( nao inclua folgas )  "
1140    For I = 1 to N
1150    Print "c(";I;") = ";
1160    Input F( I )
1170    Next I
1180    Return
1190    Rem *** Rotina Simplex ***
1200    Z = 0
1210    K1 = 0
1220    K1 = K1 + 1
1230    S1 = ( - Inf )
1240    For L = 1 to N2
1250    For I = 1 to M
1260    If L = I1( I ) Then 1370
1270    Next I
1280    S = 0
1290    For I = 1 to M
1300    J = I1( I )
1310    S = S + F( J ) * A( I,L )
1320    Next I
1330    C1( L ) = F( L ) - S
1340    If C1( L ) <= S1 Then 1370
1350    S1 = C1( L )
1360    K = L
1370    Next L
1380    For L = 1 to M
1390    I2 = I1( L )
1400    C1( I2 ) = 0
1410    Next L
1420    P = Eps
1430    If S1 <= P Then 1700
1440    K2 = 0
1450    V = Inf
1460    For L = 1 to M
1470    T = A( L,K )
1480    If T <= 0 Then 1530
1490    Q = A( L,N3 )/T
1500    If Q >= V Then 1530
```

```
1510    K2 = L
1520    V = Q
1530    Next L
1540    If K2 = 0 Then 1730
1550    I1( K2 ) = K
1560    T = 1.0/A( K2,K )
1570    For L = 1 to N3
1580    A( K2,L ) = A( K2,L ) * T
1590    Next L
1600    For L = 1 to M
1610    If L = K2 Then 1660
1620    D = ( - A( L,K ) )
1630    For J = 1 to N3
1640    A( L,J ) = A( L,J ) + A( K2,J ) * D
1650    Next J
1660    Next L
1670    Z = Z + V * S1
1680    Gosub 1750
1690    Goto 1220
1700    Print " Solucao otima "
1710    Gosub 1780
1720    Return
1730    Print " Solucao Ilimitada "
1740    Return
1750    Rem *** Rotina de Impressao ***
1760    Print
1770    Print " Iteracao n. "; K1
1780    Print
1790    Print " Valores das variaveis basicas "
1800    Print
1810    For L = 1 to M
1820    Print  " X(";I1(L);") = ";A( L,N3 )
1830    Next L
1840    Print
1850    Print " Valor da funcao objetivo : ";Z
1860    Return
```

Existem duas funções pré-definidas:

i) *Eps* (linha 1390): menor número representado pela máquina e

ii) *Inf* (linha 1200): maior número representado pela máquina

que foram utilizadas no programa.Caso o seu micro não contenha essas funções, atribua valores a Eps e Inf (talvez o manual do micro contenha informações a esse respeito).

b) Exemplo de uma Rodada

Vamos utilizar o problema do fabricante de móveis proposto em 14.5.2 para ilustrar uma rodada do programa.

```
 Numero de restricoes
? 2
 Numero de variaveis
? 2
 Entrada da matriz de restricoes pelo
 teclado( T ) ou pelo DATA( D )
? T
 Entrada da matriz de restricoes
 A( 1 , 1 ) = ? 5
 A( 1 , 2 ) = ? 20
 A( 2 , 1 ) = ? 10
 A( 2 , 2 ) = ? 15
 Entrada do Vetor b
 b( 1 ) = ? 400
 b( 2 ) = ? 450
 Entrada do Vetor Custo
 ( nao inclua folgas )
c( 1 ) = ? 4500
c( 2 ) = ? 8000

 Iteracao n.  1

 Valores das variaveis basicas

 X( 2 ) =  20
 X( 4 ) =  150

 Valor da funcao objetivo :  160000

 Iteracao n.  2

 Valores das variaveis basicas

 X( 2 ) =  14
 X( 1 ) =  24
```

```
Valor da funcao objetivo :  220000
Solucao otima

Valores das variaveis basicas

X( 2 ) =  14
X( 1 ) =  24

Valor da funcao objetivo :  220000
```

Caso o leitor deseje rodar o programa utilizando o comando *DATA*, deve-se acoplar as linhas abaixo ao programa:

```
1850 Data 5,20          ! Restricao n. 1
1860 Data 10,15         ! Restricao n. 2
1870 Data 400,450       ! Vetor b
1980 Data 4500,8000     ! Vetor Custo
```

14.6 EXERCÍCIOS

1. A Cia. VT produz televisores em cores e em preto e branco. Uma pesquisa de mercado indicou que mensalmente podem ser vendidos, no máximo, 4.000 unidades de aparelhos em cores e 1.000 unidades em preto e branco. O setor de produção informou que o número de homens-horas disponíveis por mês é de 50.000, e um aparelho colorido requer 20 homens-horas e um aparelho preto e branco requer 15 homens-horas.

   O Departamento de Vendas informou que para atender os pedidos já efetuados este mês, deverão ser produzidos, no mínimo, 800 aparelhos coloridos. Os aparelhos são embalados em caixas de papelão e o departamento de matéria-prima informou que, por uma falha de previsão, existem disponíveis somente 4.200 caixas para a embalagem dos aparelhos e para este mês não está prevista nova compra deste material. Os lucros unitários dos aparelhos são Cr$ 50.000,00 (colorido) e Cr$ 28.000,00 (preto e branco). Deseja-se estabelecer o plano de produção que produzirá o lucro máximo para esta indústria.

2. Arley Tão cria porcos para vender, e ele deseja determinar as quantidades de cada alimento que deverão ser dadas a cada porco para obter os requerimentos nutricionais a um custo mínimo. O número de unidades de cada tipo de ingrediente nutricional básico encontrado num quilo de cada alimento é dado na tabela abaixo, juntamente com os requerimentos diários e o custo.

Ingrediente nutricional	*Quilo de milho*	*Quilo de cereais*	*Quilo de alfafa*	*Mínimo requerido diariamente*
Carboidratos	90	20	40	200
Proteínas	30	80	60	180
Vitaminas	10	20	60	150
Custo Cr$	2.540,00	2.360,00	2.000,00	

3. A Cia. Sovina de Investimentos possui Cr$ 6.000.000,00, quantia esta que deverá ser aplicada em 5 tipos de investimento, sendo que os retornos para cada investimento são: investimento 1 (I1): 10%, investimento 2 (I2): 8%; investimento 3 (I3): 6%; investimento 4 (I4): 5%; investimento 5 (I5): 9%.

   O gerente desta Cia. deseja diversificar os investimentos para obter o máximo rendimento possível. Dado o elemento de risco envolvido, o gerente restringiu a quantia aplicada no I1 a não mais que a quantia total que irá investir em I3, I4 e I5 (em conjunto). A quantia total aplicada em I2 e I5 deve ser pelo menos igual à quantia aplicada em I3. O I2 deve estar limitado a um nível que não exceda a quantia aplicada em I4.

   É preciso determinar a alocação ótima de investimento entre as 5 categorias, de forma que o retorno ao final do ano seja o máximo possível.

4. Um fazendeiro quer comprar as seguintes quantidades de fertilizantes: fertilizante 1: 185 ton; fertilizante 2: 50 ton; fertilizante 3: 50 ton; fertilizante 4: 200 ton. Ele pode comprar estes fertilizantes em 3 lojas diferentes sendo a disponibilidade de cada loja e os custos dos vários tipos de fertilizantes nas várias lojas fornecidos nas tabelas abaixo.

Disponibilidade				
Loja	Fertilizante			
	1	2	3	4
1	70	–	60	150
2	100	30	–	100
3	100	40	35	70

Custo Cr$/ton				
Loja	Fertilizante			
	1	2	3	4
1	450	–	300	319
2	425	180	–	350
3	480	200	240	325

Como o fazendeiro pode preencher suas necessidades de fertilizante a um custo mínimo?

5. A Cia. ZigZag possui fábricas em Campinas e Belo Horizonte. Esta Cia. produz e distribui máquinas de costura a comerciantes de várias cidades. Numa determinada semana, a Cia. possui: 30 unidades em Campinas e 40 unidades em BH. Nesta mesma semana, esta Cia. deve atender os pedidos dos comerciantes das seguintes cidades: São Paulo: 20 unidades, Rio de Janeiro: 25 unidades e Vitória: 25 unidades.

O problema consiste em distribuir as máquinas aos comerciantes de forma a atender os pedidos a um custo mínimo de transporte. Os custos unitários são:

Origem \ *Destino*	*SP*	*RJ*	*Vitória*
Campinas	700	1.300	2.000
BH	2.200	1.800	1.700

6. Uma refinaria mistura 4 tipos de gasolina e produz 3 tipos de combustível. Os dados são fornecidos nas tabelas abaixo.

Tipo de gasolina	*Taxa de octano*	*Nº de barris disponíveis diariamente*
1	68%	4.000
2	86%	5.050
3	91%	7.100
4	99%	4.300

Combustível	*Taxa mínima de octano*	*Lucro*	*Demanda diária*
1	95%	7.200 u.c.p.	no máximo 10.000
2	90%	6.000 u.c.p.	—
3	85%	5.000 u.c.p.	pelo menos 15.000

A refinaria vende a gasolina não usada para produzir combustível a 4.900 u.c.p. se sua taxa de octano for acima de 90% e a 3.800 u.c.p. se sua taxa de octano for menor que 90%. Como pode a refinaria maximizar o lucro total diário?

7. *a*) Resolva o problema dos televisores (Exercício 1) pelo método gráfico.
   b) Escreva o problema na forma padrão.
   c) Através da solução obtida no item *a*), calcule o valor das variáveis de folga na solução ótima;
   d) Interprete os valores das variáveis de folga.

8. Um aluno do curso de MS415 quer aproveitar o que já aprendeu a respeito da Programação Linear para resolver um problema particular muito grave. Atualmente, ele possui duas namoradas: Maria e Luísa. Ele faz alguns cálculos e estudos, dos quais concluiu que:
   a) Maria, muito elegante e sofisticada, prefere freqüentar bares e boites mais requintados, de modo que uma saída de 3 horas custará Cr$ 1.500,00.
   b) Luísa é mais simples e prefere divertimentos mais populares, de modo que uma saída de 3 horas custará Cr$ 800,00.
   c) Após pagar as contas da república onde mora, e outros gastos, restam para ele Cr$ 5.000,00 mensais para diversão.
   d) Seus afazeres escolares são muitos (lista de exercícios, programas etc.) e consomem muito do seu tempo e energia, de tal forma que lhe sobram, mensalmente, 30 horas e 40.000 calorias para as atividades sociais.
   e) Cada saída com Maria consome 3.000 calorias, mas com Luísa, mais alegre e extrovertida, gasta o dobro.
   f) É importante colocar que ele gosta das duas com a mesma intensidade.

Tomando como base as conclusões acima, ele quer planejar sua vida social de modo a obter o número máximo de saídas.

Formule o problema e resolva-o. Após conseguir o resultado, comunique-o à classe para que este aluno (que prefere que seu nome não seja revelado por razões que parecem óbvias) possa conferir com a solução ótima por ele obtida.

9. A Cia. KI-SORVETEBOM produz dois tipos de sorvetes: picolé e copinho. Nesta Cia. o único ponto crítico é a mão-de-obra disponível. O copinho consome 50% a mais de mão-de-obra que o picolé. Sabe-se também que se todo o sorvete produzido fosse do tipo picolé a Cia. produziria 400 toneladas por dia. O mercado limita a produção diária do copinho e picolé em 150 e 300 toneladas, respectivamente.

   O lucro por tonelada de copinho e picolé produzidos é Cr$ 5.000,00 e Cr$ 3.500,00 por tonelada, respectivamente.

   Formular e resolver o problema que permita determinar a quantidade a ser produzida de cada tipo de sorvete.

   Discuta a solução ótima obtida e verifique os valores das variáveis de folga.

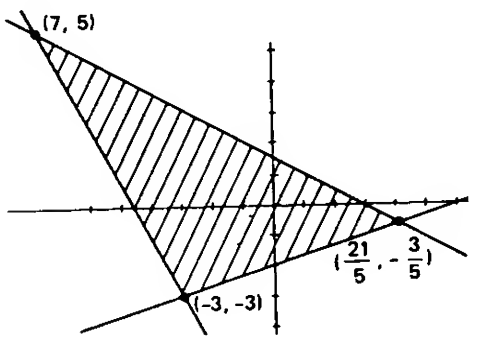
10. Resolva todos os exercícios que você achar interessante (incluindo aqueles propostos na solução geométrica e os desta seção) que podem ser resolvidos pelo método simplex sem usar o método das 2 fases.

11. Resolva o Exercício 2 desta seção usando o método das 2 fases. Repare que como as restrições são do tipo $\geqslant$ então é necessário subtrair variáveis (neste caso chamadas de variáveis de excesso) para colocar o problema na forma padrão.

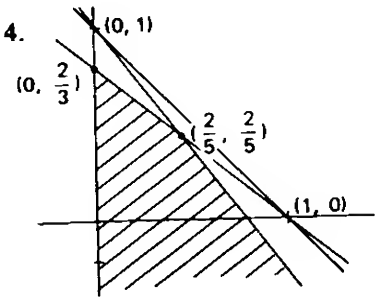
14.7 RESPOSTAS

14.7.1 Respostas de 14.4

2.



4.



6. Não

8. $\begin{cases} x - 2y - 1 \leqslant 0 \\ x + y + 2 \geqslant 0 \\ 2x - y - 2 \leqslant 0 \\ 4x - 5y + 8 \geqslant 0 \end{cases}$

10. 80 do tipo A e nenhum de B.

12. O primeiro método 100 minutos e o segundo 25 minutos.

14. $T = 200°C$ e $P = 20$ atmosferas

14.7.2 Respostas de 14.6

1. Sugestão: faça x_1 = quantidade de televisores coloridos produzidos
   x_2 = quantidade de televisores branco e preto produzidos

3. Seja x_i = quantidade aplicada no investimento I_i

$$\text{Max } z = 0{,}1x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}09x_5$$
$$\text{s/a} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6.000.000$$
$$x_1 \leqslant x_3 + x_4 + x_5$$
$$x_2 + x_5 \geqslant 3;\ x_2 \leqslant x_4 \text{ e } x_i \geqslant 0$$

4. x_{ij} = quantidade (em toneladas) de fertilizante i comprado na loja j

$$\text{Min } z = 450x_{11} + 425x_{12} + 480x_{13} + 180x_{22} + 200x_{23} +$$
$$+ 300x_{31} + 240x_{33} + 319x_{41} + 350x_{42} + 325x_{43}$$

$$\text{s/a} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} = 185$$
$$x_{22} + x_{23} = 50$$
$$x_{31} + x_{33} = 50$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 200$$

$$x_{11} \leqslant 70 \qquad x_{31} \leqslant 60$$
$$x_{12} \leqslant 100 \qquad x_{33} \leqslant 35$$
$$x_{13} \leqslant 100 \qquad x_{41} \leqslant 150$$
$$x_{21} \leqslant 30 \qquad x_{42} \leqslant 100$$
$$x_{23} \leqslant 40 \qquad x_{43} \leqslant 70$$

5. Sugestão: x_{ij} = número de máquinas de costura transportadas da cidade i para a cidade j ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$)

6. x_{ij} = barris de gasolina i usados na produção do combustível j

$$\text{Max } z = 7.200 \sum_{i=1}^{4} x_{i1} + 6.000 \sum_{i=1}^{4} x_{i2} + 5.000 \sum_{i=1}^{4} x_{i3} +$$

$$+ 4.900 \left[(7.100 - \sum_{j=1}^{3} x_{3j}) + (4.300 - \sum_{j=1}^{3} x_{4j})\right] +$$

$$+ 3.800 \left[(4.000 - \sum_{j=1}^{3} x_{1j}) + (5.050 - \sum_{j=1}^{3} x_{2j})\right]$$

s/a

$$0,68x_{11} + 0,86x_{21} + 0,91x_{31} + 0,99x_{41} \geqslant 0,95 \sum_{i=1}^{4} x_{i1}$$

$$0,68x_{12} + 0,86x_{22} + 0,91x_{32} + 0,99x_{42} \geqslant 0,90 \sum_{i=1}^{4} x_{i2}$$

$$0,68x_{13} + 0,86x_{23} + 0,91x_{33} + 0,99x_{43} \geqslant 0,85 \sum_{i=1}^{4} x_{i3}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} \leqslant 4.000 \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leqslant 10.000$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} \leqslant 5.050 \qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leqslant 15.000$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{3j} \leqslant 7.100 \qquad x_{ij} \geqslant 0$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{4j} \leqslant 4.300$$

Leituras Sugeridas e Referências

1 Bazaraa, M.S. e Jarvis, J.J.; *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons. USA, 1977.

2 Campbell, H.G.; *Linear Algebra with Applications*, Appleton-Century-Crofts, USA, 1971.

3 Herstein, I.N.; *Tópicos de Álgebra* Editora Polígono, São Paulo, 1971.

4 Hoffman, K. e Kunze, R.: *Álgebra Linear*, Editora Polígono, São Paulo, 1971.

5 Kemeny, J., Snell, J. e Thompson, G.; *Introduction to Finite Mathematics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1975.

6 Leithold, L.; *O Cálculo com Geometria Analítica*; HARBRA, São Paulo, 1982.

7 Maculan, N. e Pereira, M.V.F.; *Programação Linear*, Editora Atlas, São Paulo, 1980.

8 Murty, K.; *Linear and Combinatorial Programming*, John Wiley & Sons, USA, 1976.

9 Solodovnikov, A. S.; *Systems of Linear Inequalities*, Mir, Rússia, 1979.

BIBLIOGRAFIA GERAL

Boyer, C.B.; *História da Matemática*; Editora Edgar Blücher Ltda., Editora da U.S.P., São Paulo, 1974.

Bentley, D. e Cooke, K., *Linear Algebra with Differential Equations*; Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1973.

Bers, L.; *Calculus*; Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1967.

Campbell, H.G.; *Linear Algebra with Applications*; Appleton-Century-Crofts, New York, 1971.

Gelfand, I.M.; *Lectures in Linear Algebra*; Interscience Publishers, New York, 1961.

Halmos, P.; *Finite Dimensional Vector Spaces*; Van Nostrand Reinhold Company; New York, 1958.

Herstein, I.N.; *Tópicos de Álgebra*; Editora Polígono, São Paulo, 1970.

Hoffman, K. e Kunze, R.; *Álgebra Linear*; Editora Polígono, São Paulo, 1971.

Lang, S.; *Álgebra Linear*. Editora Edgar Blücher Ltda., São Paulo, 1971.

Isaacson, E. e Keller, H.; *Analysis of Numerical Methods*; Wiley, New York, 1966.

Kemeny, J., Snell, J. e Thompson, G.; *Introduction to Finite Mathematics*; Prentice Hall. Englewood Cliffs, 1957.

Lipschutz, S.; *Álgebra Linear*; McGraw-Hill do Brasil Ltda.. Rio de Janeiro, 1971.

Noble, B. e Daniel, J. *Applied Linear Algebra;* Prentice. Hall;Englewood Cliffs, New Jersey. 1977.

Paes Leme, P.J.S.; *Notas de Equações Diferenciais Ordinárias*; Impa, Rio, 1972.

Protter, M. e Morrey, C.; *College Calculus with Analytic Geometry*; Addison – Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1965.

SMSG; *Matemática: Curso Colegial*, vol. 3; Yale University Press, New Haven, 1965.

Struik, D.J., *A Concise History of Mathematics*; Dover, New York, 1967.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Adição de matrizes, 6
Adjunta, matriz, 72
Aleatória, variável, 236
Amostral, espaço, 236
Ângulo entre dois vetores, 219
Aplicação
  identidade, 178
  injetora, 151-152
  nula, 195
  sobrejetora, 152
Auto-adjunto, operador, 253, 258
  diagonalização, 261-262
Autovalor, 16, 180, 335
  de uma matriz, 184
  multiplicidade algébrica de, 194
  multiplicidade geométrica de, 194
  subespaço associado, 183
Autovalores de operadores
  auto-adjuntos, 262
Autovetor, 16, 180
  de uma matriz, 184

B

Base, 116, 118, 203
  de um subespaço, 131
  matriz mudança de, 125, 126
  mudança de, 15
    por rotação, 17
  ortonormal, 229
Bilinear
  forma, 270
  matriz de uma forma, 272

C

Cadeia de Markov, 14
Característico
  polinômio, 184
  valor, 180
  vetor fixo, 180
Cartesianas, equações, 286
Cilindro, 300
  elíptico, 300
  hiperbólico, 301
  parabólico, 301
Circunferência, 289
Cisalhamento, 150
Classificação
  das cônicas, procedimento geral, 296, 297-298
  das quadráticas, 299-304
Coeficientes
  de Fourier, 225-226
  matriz de, 65
Cofator, 70
Cofatores,
  matriz de, 72
Coluna, matriz, 3
Complemento
  algébrico, 70
  ortogonal, 234
Cone quadrático, 300
Conjuntos convexos, 350-374
Cônicas
  classificação, 296, 297-298
  forma reduzida das, 291
  no plano, 289
Contração uniforme, 147
Correlação linear, coeficiente de, 238
Cramer, Regra de, 77

D

Degenerada, hipérbole, 290
Degenerada, parábola, 290, 291
Degeneradas, quádricas, 301
Dependência e independência linear, 114
Desenvolvimento de Laplace, 69
Desigualdade de Schwarz, 228
Desigualdade trangular, 228
Desvio padrão, 237
Determinante, 66
Diagonal, matriz, 4
Diagonalização de formas quadráticas, 277, 278
Diagonalização de operadores, 199
Diagonalização de operadores auto-adjuntos, 261, 262
Diagonalização simultânea de operadores, 209
Diagonalizável, matriz, 213
Dimensão de um espaço vetorial, 119
Dual, espaço, 282

E

Elementar, matriz, 82
Elipse, 289
Elipse degenerada, 291
Elipsóide, 298
Elíptico, cilindro, 300
Elíptico, parabolóide, 299
Equação diferencial, 317
Equação diferencial linear homogênea, 319
Equações cartesianas, 286
Equações diferenciais, sistemas lineares, 316
Erro, estimativa de, 346
Escalar
  multiplicação por, 7
  produto, 220, 221
Escalonada, matriz, 190
Espaço amostral, 236
Espaço dual, 282
Espaço vetorial, 103
  complexo, 103, 105
  dos polinômios, 105
  real, 103
  R^n, 104
Espaços vetoriais isomorfos, 156
Esperado, valor; *veja* valor médio
Exato, processo, 332
Expansão uniforme, 147

F

Forma bilinear, 270
  matriz de, 272
Forma bilinear simétrica, 274
Forma de Jordan, 210
Forma escada, matriz-linha reduzida à, 34-38
Forma linear, 269
Forma quadrática, 274
  diagonalização, 277, 278
  positiva definida, 282
Forma reduzida das cônicas, 291
Função objetivo, 362

G

Gauss, método de, 36, 51
Gauss-Seidel, processo de, 345
Gram-Schmidt, processo de, 229, 230
  veja processo de ortogonalização
Grau de liberdade de sistemas de equações lineares, 45-46

H

Hipérbole, 290
Hipérbole degenerada, 290
Hiperbólico, cilindro, 301
Hiperbólico, parabolóide, 300
Hiperbolóide de duas folhas, 299
Hiperbolóide de uma folha, 299
Homogênea, equação diferencial linear, 319

I

Identidade, matriz, 4
Imagem, 151-155
Impossíveis, sistemas de equações lineares, 29

Indeterminados, sistemas de equações lineares, 44
Injetora, 196
  aplicação, 151-154
Intersecção de, 110
Inversa, matriz, 73
Inversível, matriz, 335, 337
Inversão, 66
Isomorfismo, 156
Iterativo, processo, 333

J

Jacobi, método de, 344
Jordan, forma de, 210

L

Linear
  homogênea, equação diferencial, 319
  operador, 180
  variedade, 109
Linha
  matriz, 4
Linha equivalente
  matriz, 36
Linha reduzida à forma escada
  matriz, 36-38

M

Markov
  cadeia de, 14
  processo de, 14
Matriz, 1
  adjunta, 72
    coluna, 3
  das probabilidades de transição, 15
  de coeficientes, 65
  de cofatores, 72
  diagonal, 4
  elementar, 82
  escalonada, 190
  identidade, 4
  inversa, 73
  inversível, 184, 185, 335, 337
  linha, 4
  linha equivalente, 36
  linha reduzida à forma escada, 36, 38
  linhas independentes de uma, 40
  norma de, 188, 189, 340
  nula, 3
  nulidade, 38
  ortogonal, 254
  posto de, 39, 45
  produto, 10
  quadrada, 3
  simétrica, 5, 7, 254
  transposta, 7
  triangular, 91
  triangular inferior, 4
  triangular superior, 4
Matriz de uma transformação composta, 163
Matriz de uma transformação inversa, 165
Matriz de uma transformação linear, 157
Matriz diagonalizável, 213
Matriz, mudança de base, 125, 126
Matrizes
  adição de, 6
  iguais, 3
    linha equivalentes, 85
  multiplicação de, 9
  semelhantes, 92
  seqüência de, 12, 178, 333
  série de, 180, 334
Matrizes semelhantes, 166
Máximos e mínimos,valores, 109
Médio, valor, 223, 254
Método
  da variação dos parâmetros, 325
  das duas fases, 391
  de Gauss, 36, 51
  simplex, 374-404
    pivoteamento, 383
    solução geométrica, 376
    tableau simplex, 381
    visão algébrica, 386
Minimal, polinômio, 206, 207
Mudança de base, 125
Mudança de base por rotação, 127
Multiplicação por escalar, 7

N

Norma, 219-221
  de matriz, 340
  do máximo, 341
Normalizado, vetor, 227; *veja* vetor unitário
Núcleo, 151-155
Nula, matriz, 3
Nulidade, 162
  matriz, 38
Número de soluções de sistemas de equações lineares, 29

O

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz, 35
Operador
  auto-adjunto, 253, 258
  diagonalizável, 203
  idempotente, 215
  linear, 180
  nilpotente, 214
  ortogonal, 253
    caracterização, 261-262
Ortogonal, matriz, 254
Ortogonal, operador, 253
Ortogonais, vetores, 224, 225
Ortogonalização, processo de, 229, 230
Ortonormal, base, 229

P

Parábola, 290
Paraboloide
  elíptico, 299
  hiperbólico, 300
Parâmetros, método de variação dos, 325
Permutação, 66
Perpendiculares, vetores, 224-225
Plano, no espaço, 288
Plano
  retas no, 288
  vetores no, 97
Polinômio calculado em matriz, 203
  característico, 185
  minimal, 206-207
Polinômios, espaço vetorial dos, 105
Possíveis, sistemas de equações lineares, 29
Posto, 162, 187
  de matriz, 39, 45, 80
Probabilidades de transição, matriz das, 15
    vetor de, 15
Processo
  aleatório, 14
  de Markov, 14
  exato, 232
  iterativo, 232
Produto
  escalar, 220-221
  interno, 220-221
    em espaços vetoriais complexos, 234
    usual, 222
  matriz, 10
Programação linear, 362
  método
    geométrico, 362
    simplex, 374-404
  programa-exemplo, 392
  teorema fundamental da, 368, 379

Q

Quadrada, matriz, 3
Quádricas
  classificação das, 298-301
  degeneradas, 301
  no espaço, 298

R

Reflexão, 148, 178, 181
Região
  factível, 362
  poliedral convexa fechada, 358
Reta no plano, 287
Rotação, 149, 182

S

Segmento, 356
Semi-espaço
  aberto, 354
  fechado, 354
Simétrica, matriz, 5, 7
Sistemas de equações lineares, 29
  equivalentes, 32, 36
  grau de liberdade de, 45, 46
  impossíveis ou incompatíveis, 44
  indeterminados, 44
  número de soluções de, 44
  possíveis (ou incompatíveis), 44
  resolução de, 29
  solução de, 33, 41
Sistemas equivalentes, 85
Solução
  de um sistema de equações diferenciais, 318, 319
  geral de uma equação diferencial, 318
  geral de um sistema de equações diferenciais, 318
Subconjunto convexo, 356
Subespaços vetoriais, 105
  gerados, 112
  intersecção de, 110
  soma de, 111
  soma direta de, 112
Submatriz, 70, 80

T

Tableau simplex, 381
  base inicial factível, 381
  solução
    alternativa, 389
    ilimitada, 389
Transformação linear, 142
Transformações
  do plano no plano, 147
  lineares inversíveis, 165
Translação, 150
Transposição, 7
Transposta, matriz, 7
Triangular inferior, matriz, 4
Triangular superior, matriz, 4

U

Unitário, vetor, 227

V

Valor
  característico, 180
  esperado; *veja* valor médio
  médio, 223, 237
Valores máximos e mínimos, 109
Variação dos parâmetros, método, 325
Variação linear, 351
Variança, 237
Variável aleatória, 236
Variedade linear, 104, 109, 114
Vazio, 291
Vértices, caracterização geométrica dos, 360
Vetor
  característico, 180
  de probabilidades, 15, 236
  fixo, 178
Vetores, 102
  LI, 114
  no espaço, 101
  no plano, 97
Vetoriais
  espaços, isomorfos, 156
  subespaços, 105